ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ NHỰT NAM

TIỂU LUẬN CUỐI KỲ

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU KHOA HỌC - TOÁN K33

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ NHỰT NAM

TIỂU LUẬN CUỐI KỲ

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU KHOA HỌC - TOÁN K33

CHUYÊN NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 84 60 112

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. BÙI XUÂN HẢI
PGS.TS. MAI HOÀNG BIÊN

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2024

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin phép gửi lời cảm ơn chân thành đến các Thầy hướng dẫn của môn học Phương pháp nghiên cứu khoa học - GS. TS. Bùi Xuân Hải và PGS. TS Mai Hoàng Biên - giảng viên khoa Toán - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM đã trực tiếp hướng dẫn và giúp đỡ tận tình trong suốt quá trình nghiên cứu thực hiện tiểu luận này. Nhờ vào những định hướng, và góp ý quý giá của thầy, tôi đã hoàn thành trọn vẹn đề tài tiểu luận của mình.

Tiếp theo, tôi xin gửi lời cảm ơn đến quý Thầy, Cô trong khoa Toán - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM đã nhiệt tình giảng dạy đã truyền đạt cho tôi những kiến thức sâu sắc về mặt chuyên môn lý thuyết và ứng dụng thực tiễn trong suốt quá trình học tập ở trường. Những điều này đã góp phần quan trọng trong việc hoàn thành tiểu luận này của tôi.

Lê Nhựt Nam

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CHỮ VIẾT TẮT

Set	Tập hợp
Subset	Tập hợp con
Intersection	Giao
Union	Hội
Set difference	Hiệu tập hợp
Symmetric differnece	Hiệu đối xứng
Power set	Tập lũy thừa
Ordered pair	Cặp thứ tự
Cartesian product	Tích Cartesian
Function	Hàm
Map	Ánh xạ
Domain	Miền
Co-domain	Đồng miền
Injective function/ map	Đơn ánh
Surjective function/ map	Toàn ánh
Bijective function/ map	Song ánh
Permutation	Hoán vị
Composition of functions	Hàm hợp/ Ánh xạ hợp
Image of function	Ảnh của ánh xạ/ hàm
Pre-image of function	Tiền ảnh của ánh xạ/ hàm
Identiy map	Ánh xạ đơn vị
Left inverse of function	Nghịch đảo trái của hàm
Right inverse of function	Nghịch đảo phải của hàm
Inverse of function	Nghịch đảo của hàm

Relation	Quan hệ
Reflexive relation	Quan hệ phản xạ
Symmetric relation	Quan hệ đối xứng
Transitive relation	Quan hệ kết hợp
Equivalence relation	Quan hệ tương đương
Equivalence class	Lớp tương đương
Partition of set	Phân hoạch tập hợp
Quotient map	Ánh xạ thương
Empirical knowledge	Tri thức kinh nghiệm
Scientific knowledge	Tri thức khoa học

DANH MỤC CÁC BẢNG

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

LỜI NÓI ĐẦU

Đây là tiểu luận cuối kỳ môn học Phương pháp nghiên cứu khoa học, cao học ngành Toán, khóa 33. Trong tiểu luận này, chúng tôi trình bày thành từng chương, mỗi chương bình luận và đưa ra câu trả lời cho từng câu hỏi mà đề tài yêu cầu. Hai chương đầu tiên của tiểu luận thuộc phần thực hành, và các chương còn lại thuộc phần lý thuyết. Cấu trúc của tiển luận như sau:

Chương 1: Tóm tắt và nhận xét khoa học Trong chương này, chúng tôi thực hành làm một bản tóm tắt khoa học và một bản nhận xét khoa học đối với một bài báo khoa học đã được chấp nhận đăng tải trên một tạp chí ngành Toán.

Chương 2: Tập hợp, Hàm, và Quan hệ Trong chương này, chúng tôi trình bày một chủ đề đầu tiên và cũng là nền tảng cho Toán cao cấp - Tập hợp, Hàm, và Quan hệ.

Chương 3: Phân tích về tri thức kinh nghiệm & tri thức khoa học Đối với chương này, chúng tôi trình bày và phân tích về tri thức kinh nghiệm và tri thức khoa học để làm rõ sự khác biệt giữa hai khái niệm này.

Chương 4: Mục đích và mục tiêu nghiên cứu Trong chương này, chúng tôi trình bày và phân tích về mục đích và mục tiêu trong nghiên cứu khoa học. Từ đó, chúng tôi chỉ ra và làm rõ sự khác biệt giữa hai khái niệm này.

Chương 5: Phẩm chất trong nghiên cứu khoa học Trong chương này, chúng tôi trình bày và phân tích những phẩm chất trong một nghiên cứu khoa học. Chúng tôi dựa trên những nhận định của GS. Ngô Bảo Châu và tập trung vào ba yếu tố chính bao gồm: đúng, trung thực, và mới và hay, trong đó tập trung nhấn mạnh vào yếu tố đúng và trung thực.

Chương 6: Lựa chọn đề tài nghiên cứu khoa học Trong chương này, chúng tôi trình và phân tích về giai đoạn lựa chọn đề tài nghiên cứu khoa học.

Chương 7: Vai trò của tạp chí Mathematical reviews Trong chương này, chúng tôi tìm hiểu và thảo luận về vai trò của tạp chí Mathematical reviews đối với những người làm Toán.

Chương 8: Bình luận về Impact Factor Chỉ số Impact Factor (IF) là một trong các chỉ số quan trọng trong việc lựa chọn tạp chí. Vì thế, trong chương này chúng tôi trình bày về nó, và phân tích ý nghĩa của nó đối với một tạp chí. Đồng thời, chúng tôi cũng đặt ra và làm rõ một câu hỏi ”liệu Impact factor thấp thì có đáng lo ngại?”.

Chương 9: Thông tin học viên Có lẽ gọi là chương thì cũng không đúng lắm, nhưng để phù hợp và thống nhất với cấu trúc chung mà ban đầu chúng tôi đã đặt ra thì chúng tôi tạm gọi nó là Chương. Trong chương này trình bày về một số thông tin cơ bản của học viên và ngành học của học viên.

Chương 10: Thiết kế luận văn thạc sĩ Toán học Trong chương này, chúng tôi thực hiện trình bày cấu trúc hoàn chỉnh cho một luận văn thạc sĩ Toán học với một đề tài giả định.

CHƯƠNG 1
TÓM TẮT VÀ NHẬN XÉT KHOA HỌC

Trong chương này, chúng tôi thực hành làm một bản tóm tắt và nhận xét khoa học đối với bài báo *On Global Error Bounds for Convex Inequalities Systems* của tác giả/ Thầy Võ Sĩ Trọng Long đăng trên tạp chí *Journal of Optimization Theory and Applications*. Bản đính kèm copy được ghép trong báo cáo này.

1.1. Bản tóm tắt khoa học

Trong bài báo này, trước tiên tác giả trình bày các điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của chặn sai số toàn cục đối với hàm lồi mà không có điều kiện bổ sung đối với hàm hoặc tập nghiệm. Đặc biệt, chúng ta thu được các đặc tính của các giới hạn sai số toàn cục như vậy trong không gian Euclide, thường dễ kiểm tra. Thứ hai, chúng tôi cung cấp rằng theo một giả định phù hợp, dưới vi phân của hàm tối cao của một họ tùy ý các hàm liên tục lồi trùng với bao lồi của dưới vi phân của các hàm tương ứng với các chỉ số kích hoạt tại các điểm đã cho. Hơn nữa, về mặt ứng dụng, bài báo nghiên cứu sự tồn tại của chặn sai số toàn cục đối với các hệ bất đẳng thức tuyến tính và lồi vô hạn. Một số ví dụ cũng được cung cấp để giải thích những ưu điểm của kết quả được trình bày so với những kết quả hiện có trong các tài liệu tham chiếu gần đây.

1.2. Bản nhận xét khoa học

Bài báo này nghiên cứu sự tồn tại và đặc trưng của các chặn sai số toàn cục cho các hàm lồi trong không gian Euclid, cung cấp các điều kiện cần và đủ mà không cần áp đặt các yêu cầu bổ sung lên các hàm hoặc tập nghiệm của chúng. Bằng cách tập trung vào không gian Euclid, tác giả đưa ra các điều kiện dễ kiểm tra, nâng cao tính ứng dụng thực tế.

Hơn nữa, tác giả khám phá các tính chất của dưới vi phân của hàm chặn trên nhỏ nhất được hình thành từ một tập hợp tùy ý của các hàm lồi liên tục. Cụ thể, tác giả chứng minh rằng, dưới một giả định thích hợp, dưới vi phân của hàm chặn trên nhỏ nhất này tương ứng với bao lồi của các dưới vi phân của các hàm thành phần tại các chỉ số đang hoạt động. Kết quả này mở rộng hiểu biết của chúng ta về mối quan hệ giữa các dưới vi phân của các hàm thành phần và hàm chặn trên nhỏ nhất của chúng, cung cấp một góc nhìn mới về phân tích lồi.

Các ứng dụng của những phát hiện lý thuyết này đặc biệt có liên quan đến việc nghiên cứu các chặn sai số toàn cục trong các hệ thống được đặc trưng bởi các bất đẳng thức tuyến tính và lồi vô hạn. Kết quả của tác giả không chỉ tổng quát hóa các lý thuyết hiện có mà còn cung cấp các tiêu chí thực tế dễ áp dụng hơn.

Xuyên suốt bài báo, nhiều ví dụ được đưa ra để minh họa những ưu điểm của các điều kiện đề xuất so với các điều kiện hiện có, chứng minh hiệu quả và tính hữu dụng cải thiện của phương pháp tiếp cận của chúng tôi trong nhiều ngữ cảnh khác nhau. Các ví dụ này nhấn mạnh tầm quan trọng thực tiễn của những đóng góp lý thuyết của tác giả, làm nổi bật tiềm năng ảnh hưởng đến việc giải quyết các vấn đề tối ưu hóa phức tạp liên quan đến các hàm lồi.

CHƯƠNG 2

TẬP HỢP, HÀM, VÀ QUAN HỆ

Trong chương này, chúng tôi trình bày về chủ đề tập hợp, hàm, và quan hệ. Đây là một chủ đề nền tảng cơ sở cho Toán học. Chủ đề này nhằm củng cố kiến thức nền tảng cho Giải tích 1.

2.1. Tập hợp

Định nghĩa (Tập hợp)**.** *Tập hợp (set)* là một các đối tượng, không liên quan đến thứ tự. Các phần tử trong một tập hợp chỉ được tính một lần. Ví dụ: nếu $a = 2, b = c = 1$ thì $A = \{a, b, c\}$ chỉ có hai thành phần. Chúng ta viết $x \in X$ nếu x là thành phần của tập X.

Ví dụ. Các tập hợp phổ biến và các ký hiệu dùng để biểu thị chúng:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ là các số tự nhiên
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ là các số tự nhiên với 0
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ là các số nguyên
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ là các số hữu tỉ
- $\mathbb{R}$ là các số thực
- $\mathbb{C}$ là các số phức

Người ta vẫn còn tranh luận liệu 0 có phải là số tự nhiên hay không. Những người tin rằng 0 là số tự nhiên thường viết $\mathbb{N}$ cho $\{0, 1, 2, \cdots\}$ và $\mathbb{N}^+$ cho các số tự nhiên dương. Tuy nhiên, trong hầu hết mọi trường hợp, điều đó không thành vấn đề và khi xảy ra, chúng ta nên đưa ra chỉ định rõ ràng.

Định nghĩa (Sự bằng nhau của các tập hợp)**.** A được gọi là bằng B, và được viết là $A = B$, nếu

$$(\forall x)\, x \in A \Leftrightarrow x \in B,$$

tức là, hai tập hợp là bằng nhau khi chúng có cùng phần tử.

Định nghĩa (Tập hợp con)**.** A là một *tập hợp con* của B, được viết là $A \subseteq B$ hoặc $A \subset B$, nếu tất cả các phần tử trong A đều nằm trong B, tức là

$$(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Định lý. $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B$ và $B \subseteq A)$

Giả sử X là một tập hợp và P là thuộc tính của một số phần tử trong x, chúng ta có thể viết một tập hợp $\{x \in X : P(x)\}$ cho tập con của x bao gồm của các phần tử mà $P(x)$ là đúng. Ví dụ: $\{n \in \mathbb{N} : n$ là số nguyên tố$\}$ là tập hợp tất cả các số nguyên tố.

Định nghĩa (Giao, hội, hiệu tập hợp, hiệu đối xứng, và tập lũy thừa)**.** Cho hai tập A và B, chúng ta định nghĩa như sau:

- Giao: $A \cap B = \{x : x \in A$ và $x \in B\}$
- Hội: $A \cup B = \{x : x \in A$ hoặc $x \in B\}$
- Hiệu tập hợp: $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$
- Hiệu đối xứng: $A \Delta B = \{x : x \in A$ hoặc chỉ $x \in B\}$, tức là các phần tử thuộc chính xác một trong hai tập
- Tập lũy thừa: $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$, tức là tập hợp tất cả các tập hợp con

Các tập hợp mới chỉ có thể được tạo thông qua các toán tử trên đối với các tập hợp cũ (cộng thay thế, nghĩa là ta có thể thay thế một phần tử của tập hợp bằng một phần tử khác). Người ta không thể tùy tiện tạo các tập hợp như $X = \{x : x$ là một tập hợp và $x \notin x\}$. Nếu không nghịch lý sẽ nảy sinh.

Chúng ta có một số quy tắc liên quan đến cách hoạt động của các toán tử, điều này có thể thấy rõ bằng trực giác.

Mệnh đề.

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ký hiệu. Nếu A_α là các tập hợp với mọi $\alpha \in I$, thì

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : (\forall \alpha \in I) x \in A_\alpha\}$$

và

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : (\exists \alpha \in I) x \in A_\alpha\}.$$

Định nghĩa (Cặp thứ tự)**.** Một *cặp có thứ tự* (a, b) là một cặp gồm hai phần tử mà thứ tự là quan trọng. Về mặt hình thức, nó được định nghĩa là $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Chúng ta có $(a, b) = (a', b')$ nếu và chỉ nếu $a = a'$ và $b = b'$.

Định nghĩa (Tích Cartesian)**.** Cho hai tập A, B, *tích Descartes* của A và B là $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Điều này có thể được mở rộng cho tích n lần, ví dụ: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (chính thức là $\{(x, (y, z)) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$).

2.2. Hàm

Định nghĩa (Hàm/ ánh xạ)**.** Một *hàm (function)* (hoặc *ánh xạ - map*) $f : A \to B$ là một "quy tắc"gán, cho mỗi $a \in A$, chính xác một phần tử $f(a)$ $bngB$. Chúng ta có thể viết $a \mapsto f(a)$. A và B lần lượt được gọi là *miền (domain)* và *đồng miền (co-domain).*

Nếu chúng ta muốn hình thức hơn, chúng ta có thể định nghĩa một hàm là một tập con $f \subseteq A \times B$ sao cho với mọi $a \in A$, tồn tại một $b \in B$ duy nhất sao cho $(a, b) \in f$. Sau đó chúng ta nghĩ về $(a, b) \in f$ khi nói $f(a) = b$. Tuy nhiên, mặc dù điều này có thể đóng vai trò như một định nghĩa chính thức về hàm số, nhưng đó là một cách nghĩ rất phức tạp về hàm.

Ví dụ. $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm gửi x đến x^2. $\frac{1}{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không phải là một hàm vì $f(0)$ không được xác định. $\pm x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cũng không phải là một hàm vì nó có nhiều giá trị (multi-valued).

Việc phân loại các ánh xạ thành các loại khác nhau thường rất hữu ích.

Định nghĩa (Đơn ánh)**.** Hàm $f : X \to Y$ là *đơn ánh* nếu nó chạm vào mọi thứ nhiều nhất một lần, tức là.

$$(\forall x, y \in X)\, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Định nghĩa (Toàn ánh)**.** Hàm $f : X \to Y$ là *toàn ánh* nếu nó chạm vào mọi thứ ít nhất một lần, tức là.

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y$$

Ví dụ. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ with $x \mapsto x^2$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh.

Định nghĩa (Song ánh)**.** Một hàm là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh và vừa là toàn ánh, tức là nó chạm mọi thứ chính xác một lần.

Định nghĩa (Hoán vị)**.** Một *hoán vị* của A là một song ánh $A \to A$.

Định nghĩa (Hàm hợp)**.** *Hợp* của hai hàm là hàm mà nhận được bằng cách áp dụng lần lượt từng hàm. Cụ thể, nếu $f : X \to Y$ và $G : Y \to Z$, thì $g \circ f : X \to Z$ được xác định bởi $g \circ f(x) = g(f(x))$. Lưu ý rằng thành phần hàm có tính kết hợp.

Định nghĩa (Ảnh của hàm)**.** Nếu $f : A \to B$ và $U \subseteq A$, thì $f(U) = \{f(u) : u \in U\}$. $f(A)$ là *ảnh* của A.

Bởi định nghĩa, f là toàn ánh nếu và chỉ nếu $f(A) = B$.

Định nghĩa (Tiền ảnh)**.** Nếu $f : A \to B$ và $V \subseteq B$, thì $f^{-1}(V) = \{a \in A : f(a) \in V\}$.

Đây là *tiền ảnh* của hàm f và hoạt động trên *các tập con* của B. Điều này được xác định cho bất kỳ hàm f nào. Điều quan trọng cần lưu ý là chúng ta sử dụng cùng một ký hiệu f^{-1} để biểu thị *hàm nghịch đảo* mà chúng ta sẽ định nghĩa sau, nhưng chúng là những thực thể rất khác biệt. Ví dụ, chúng ta sẽ thấy hàm nghịch đảo chỉ tồn tại đối với song ánh.

Để định nghĩa hàm nghịch đảo, trước tiên chúng ta cần một số định nghĩa sơ bộ.

Định nghĩa (Ánh xạ đơn vị)**.** *Ánh xạ đơn vị* được định nghĩa là ánh xạ $a \mapsto a$.

Định nghĩa (Nghịch đảo trái của hàm)**.** Cho trước $f : A \to B$, một *nghịch đảo trái của hàm* của f là một hàm $g : B \to A$ mà $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Định nghĩa (Nghịch đảo phải của hàm)**.** Cho trước $f : A \to B$, một *nghịch đảo phải của hàm* of f là một hàm $g : B \to A$ mà $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Định lý. Nghịch đảo trái của f tồn tại nếu và chỉ nếu f là đơn ánh.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Nếu nghịch đảo trái g tồn tại, thì $\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow a = a'$. Do đó f là đơn ánh.

($\Leftarrow$) Nếu f là đơn ánh, chúng ta có thể xây dựng hàm g được định nghĩa như sau

$$g : \begin{cases} g(b) = a & \text{if } b \in f(A), \text{ where } f(a) = b \\ g(b) = \text{anything} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Thì g là nghịch đảo trái của f. □

Định lý. Nghịch đảo trái của f tồn tại nếu và chỉ nếu f là toàn ánh.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Ta có $f(g(B)) = B$ bởi vì $f \circ g$ là ánh xạ đơn vị. Do đó f phải là toàn ánh bởi vì ảnh của nó là B.

($\Leftarrow$) Nếu f là toàn ánh, chúng ta có thể xây dựng một g sao cho với mỗi $b \in B$, chọn một $a \in A$ với $f(a) = b$, và đặt $g(b) = mt$. $\square$

(Lưu ý rằng để chứng minh phần thứ hai, với mỗi b, chúng ta cần *chọn* một a sao cho $f(a) = b$. Nếu B là vô hạn, làm như vậy đòi hỏi phải tạo ra vô hạn sự lựa chọn tùy ý. Chúng ta có được phép làm như vậy không?

Để đưa ra những lựa chọn vô hạn, chúng ta cần sử dụng *Tiên đề lựa chọn (Axiom of choice)*, trong đó nói rõ rằng điều này được cho phép. Cụ thể, nó nói rằng với một họ các tập A_i cho $i \in I$, tồn tại một *hàm lựa chọn* $f : I \to \bigcup A_i$ sao cho $f(i) \in A_i$ với mọi i.

Vậy liệu chúng ta có thể chứng minh định lý mà không cần Tiên đề Lựa chọn không? Câu trả lời là không. Điều này là do nếu chúng ta giả sử các hàm tính từ nghịch đảo thì chúng ta có thể chứng minh Tiên đề Lựa chọn.

Giả sử mọi toàn ánh f đều có nghịch đảo đúng. Cho một họ các tập hợp không trống A_i cho $i \in I$ (không mất tính tổng quát, giả sử chúng rời rạc), hãy xác định một hàm $f : \bigcup A_i \to I$ để gửi từng phần tử đến tập hợp chứa phần tử đó. Đây là tính từ vì mỗi tập hợp đều không trống. Khi đó nó có nghịch đảo bên phải. Khi đó nghịch đảo bên phải phải gửi từng tập hợp tới một phần tử trong tập hợp đó, tức là là hàm lựa chọn cho A_i.)

Định nghĩa (Nghịch đảo của hàm)**.** Một *nghịch đảo* của f là một hàm vừa nghịch đảo trái vừa nghịch đảo phải. Nó được viết là $f^{-1} : B \to A$. Nó tồn tại nếu f là song ánh, và nó là duy nhất.

2.3. Quan hệ

Định nghĩa (Quan hệ)**.** Một *quan hệ* R trên A chỉ một số phần tử của A có liên hệ với một số khác. Một cách hình thức, một quan hệ là một tập hợp con $R \subseteq A \times A$. Ta viết aRb nếu và chỉ nếu $(a, b) \in R$.

Ví dụ. Sau đây là ví dụ về quan hệ trên các số tự nhiên:

1. aRb nếu và chỉ nếu a và b có cùng chữ số cuối cùng, ví dụ $(37)R(57)$.

2. aRb nếu và chỉ nếu a chia hết cho b. ví dụ $2R6$ và $2 \not R 7$.

3. aRb nếu và chỉ nếu $a \neq b$.

4. aRb nếu và chỉ nếu $a = b = 1$.

5. aRb nếu và chỉ nếu $|a - b| \leq 3$.

6. aRb nếu và chỉ nếu hoặc $a, b \geq 5$ hoặc $a, b \leq 4$.

Một lần nữa, chúng tôi muốn phân loại các quan hệ khác nhau.

Định nghĩa (Quan hệ phản xứng)**.** Một quan hệ R là *phản xứng* if

$$(\forall a)\, aRa.$$

Định nghĩa (Quan hệ đối xứng)**.** Một quan hệ R là *đối xứng* nếu và chỉ nếu

$$(\forall a, b)\, aRb \Leftrightarrow bRa.$$

Định nghĩa (Quan hệ kết hợp)**.** Một quan hệ R là *kết hợp* nếu và chỉ nếu

$$(\forall a, b, c)\, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc.$$

Ví dụ. Liên quan đến các ví dụ trên,

Ví dụ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
Quan hệ phản xứng	✓	✓	×	×	✓	✓
Quan hệ đối xứng	✓	×	✓	✓	✓	✓
Quan hệ kết hợp	✓	✓	×	✓	×	✓

Bảng 2.1: *Bảng phân loại quan hệ đối với Ví dụ (i) - (vi).*

Định nghĩa (Quan hệ tương đương)**.** Một quan hệ được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Ví dụ (i) và (vi) trong các ví dụ trên là các quan hệ tương đương.

Nếu đó là quan hệ tương đương, chúng ta thường viết $\sim$ thay vì R. Như tên cho thấy, quan hệ tương đương được sử dụng để mô tả các quan hệ tương tự như đẳng thức. Ví dụ, nếu chúng ta muốn biểu diễn các số hữu tỉ dưới dạng một cặp số nguyên, chúng ta có thể có một quan hệ tương đương được xác định bởi $(n, m) \sim (p, q)$ iff $nq = mp$, sao cho hai cặp là tương đương nếu chúng biểu diễn cùng một số hữu tỉ.

Ví dụ. Nếu chúng ta xem xét một bộ bài, hãy xác định hai lá bài có liên quan với nhau nếu chúng có cùng một bộ.

Như đã đề cập, chúng ta quan tấm đến những thứ được liên hệ bởi $\sim$ như tương đương. Do đó, chúng ta muốn đồng nhất tát cả những thứ "tương đương"lại với nhau và hình thành một đối tượng mới.

Định nghĩa (Lớp tương đương)**.** Nếu $\sim$ là một quan hệ tương đương, thì *lớp tương đương* $[x]$ là tập hợp tất cả các phần tử có liên quan thông qua $\sim$ đến x.

Ví dụ. Trong ví dụ về lá bài, $[8\heartsuit]$ là tập hợp tất cả các lá cơ.

Định nghĩa (Phân hoạch tập hợp)**.** Một *phân hoạch* của một tập hợp X là một tập hợp các tập con A_α của X sao cho mỗi phần tử của X nằm chính xác trong một trong A_α.

Định lý. Nếu $\sim$ là một quan hệ tương đương trên A, thì các lớp tương đương của $\sim$ tạo thành một phân vùng của A.

Chứng minh. Theo tính phản xạ, chúng ta có $a \in [a]$. Do đó, các lớp tương đương bao trùm toàn bộ tập hợp. Bây giờ chúng ta phải chứng minh rằng với mọi $a, b \in A$, $[a] = [b]$ hoặc $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Giả sử $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Khi đó $\exists c \in [a] \cap [b]$. Vậy $a \sim c, b \sim c$. Theo tính đối xứng, $c \sim b$. Theo tính bắc cầu, chúng ta có $a \sim b$. Với mọi $b' \in [b]$, ta có $b \sim b'$. Do đó, theo tính bắc cầu, chúng ta có $a \sim b'$. Do đó $[b] \subseteq [a]$. Theo tính đối xứng, $[a] \subseteq [b]$ và $[a] = [b]$. $\square$

Mặt khác, mỗi phân hoạch xác định một mối quan hệ tương đương trong đó hai phần tử có liên quan với nhau nếu chúng nằm trong cùng một phân hoạch. Do đó, các phân vùng và các quan hệ tương đương là "giống nhau".

Định nghĩa (Ánh xạ thương)**.** *Ánh xạ thương* q ánh xạ từng phần tử trong A tới lớp tương đương chứa a, tức là $a \mapsto [a]$. Ví dụ: $q(8\heartsuit) = \{\heartsuit\}$.

CHƯƠNG 3
PHÂN TÍCH VỀ TRI THỨC KINH NGHIỆM VÀ TRI THỨC KHOA HỌC

Trong chương này, chúng tôi trình bày và thảo luận về vấn đề tri thức. Một cách cụ thể, chúng tôi tập trung phân tích sự khác biệt giữa tri thức kinh nghiệm và tri thức khoa học.

3.1. Thế nào là tri thức?

Ở bất kỳ thời đại nào, con người luôn khao khát chạm tới sự hiểu biết và vươn đến cái tận cùng của vạn vật. Cuộc sống con người là hữu hạn, từ thời gian đến khả năng của bản thân. Thế nhưng trong sự khó khăn và giới hạn đó, vẫn tồn tại "vô hạn", đó chính là sự khát khao vô cùng không ngơi nghỉ để *tìm kiếm chân lý*, tìm kiếm con đường chạm đến *căn nguyên* của bản thân mình. Vấn đề tri thức là một trong những vấn đề đầu tiên mà con người đặt ra trên con đường đó. Trong giới hạn của tiểu luận này, chúng tôi trình bày vấn đề này xoay quanh ba tư tưởng ứng với ba nhà triết gia nổi tiếng trong thời kỳ đầu Hy Lạp cổ đại.

Trước hết, có lẽ phải nhắc đến Socrates. Ông là nhà triết gia đầu tiên thảo luận đến những vấn đề bản chất con người. Ông cho rằng để đạt được bản chất cao nhất của con người thì họ phải hướng tới sự hiện đích thực mà đạo đức là con đường quan trọng nhất. Ông đồng hóa hai khái niệm lớn là tri thức và nhân đức. Một câu nói nổi tiếng của ông chính là "tôi chỉ biết một điều là tôi không biết gì hết"đã gợi lên những suy ngẫm về vấn đề tri thức và bản chất thực tại của thế giới. Điều này có thể thấy được "nhân đức"trong con người ông, một sự khiêm nhường đối với kho tàn tri thức của nhân loại.

Từ những vấn đề của Socrates, học trò của ông, Plato đã đưa tư tưởng của người thầy mình lên một tầm cao mới. Ông cũng khẳng định rằng tri thức là nhân đức, và hơn nữa ông cũng đưa ra phương pháp có thể dẫn con người đạt được đến chân lý, hiểu biết đích thực và con đường đấy cũng đưa con người đến hạnh phúc thật sự. Theo ông, con người cần được khai sáng, được dẫn lối và đi tới sự hiểu biết về thực tại cuộc sống để thoát khỏi những u mê của ngu dốt. Nói cách khác, con người cần hoán cải nhờ tri thức, tức là khi cái biết đích thực xảy ra với con người tại thời điểm mà họ thấu hiểu được thực tại và thế họ sẽ không thể làm ngược lại với những hiểu biết của họ được.

Còn đối với Aristotle , việc nhận thức vấn đề và tri thức cần lời giải thích lý do hiện hữu của nó. Theo ông, tri thức được đề cập trên bốn nguyên nhân: nguyên nhân chất thể, mô thể, tác động và nguyên nhân cùng đích. Và thông ông, con người có thể đạt được tri thức nhờ quá trình chiêm nghiệm. Khi có một cuộc sống chiêm nghiệm, con người có thể đạt được sự nhân thức đích thực về bốn nguyên nhân vừa nêu. Và khi đã đạt được tri thức đích thực của sự vật, con người sẽ chọn lựa lối sống để đạt được tới hạnh phúc.

Như vậy, thông qua những quan niệm về tri thức của các nhà triết gia, ta có thể hiểu tri thức là một sự hiểu biết được tích lũy thông qua một quá trình nào đó. Và cái đích cuối cùng của nó là hướng đến cái thiện, cuộc sống hạnh phúc.

3.2. Thế nào là khoa học?

> ”Science is a set of rules that keep the scientists from lying to each other.”
>
> Tạm dịch: Khoa học là một tập hợp các quy tắc để mà giữ các nhà khoa học không nói dối lẫn nhau.
>
> *Kenneth S. Norris, được trích dẫn trong False Prophets (1988) bởi Alexander Kohn.*

Khoa học là một hệ thống tri thức của con người về các sự vật, hiện tượng, và các quy luật hoạt động của vật chất, trong tự nhiên, xã hội và tư duy. Theo Wikipedia, khoa học không chỉ là một tập hợp các thông tin đơn lẻ mà là một hệ thống phức tạp được tổ chức và phát triển qua nhiều giai đoạn lịch sử, phản ánh nhận thức của con người về thế giới xung quanh.

Quá trình hình thành khoa học có thể được biểu diễn thành các bước như sau:

- Quan Sát: Bắt đầu từ việc quan sát các hiện tượng tự nhiên và xã hội.
- Mô Tả: Tiếp theo là mô tả chi tiết những gì đã được quan sát.
- Đo Đạc: Đo đạc các thông số liên quan để có số liệu cụ thể.
- Thực Nghiệm: Thực hiện các thí nghiệm để kiểm tra và xác minh các giả thuyết.
- Phát Triển Lý Thuyết: Dựa trên kết quả thực nghiệm, phát triển các lý thuyết để mô tả và giải thích các hiện tượng.
- Tích Lũy và Tổ Chức Thông Tin: Quá trình thu thập, sắp xếp và tổ chức thông tin để hình thành tri thức khoa học.

Từ đó, con người hình thành và đạt được tri thức khoa học. Tri thức trong khoa học chính là toàn bộ lượng thông tin tích lũy qua các giai đoạn quan sát, thực nghiệm và lý thuyết hóa. Đây là kết quả của quá trình tích lũy kiến thức có hệ thống, giúp con người hiểu rõ hơn về cách mà vạn vật vận hành.

Một trong những động lực chính của khoa học là sự tò mò và hoài nghi. Tuy nhiên, thái độ hoài nghi không phải là bản năng tự nhiên của con người. Mọi người thường có xu hướng tin vào những gì họ được nghe. Nhưng để làm khoa học và đạt được tri thức khoa học, con người cần phải có thái độ hoài nghi, không dễ dàng tin vào những gì chưa được chứng minh. Trong nhiều trường hợp, những thông tin không đúng sự thật có thể được lặp lại nhiều lần và dần

dần được chấp nhận như là sự thật. Nếu không có thái độ hoài nghi và không tự mình tìm hiểu, con người sẽ khó mà đạt được tri thức thực sự trong khoa học.

Quá trình nhận thức của con người được thực hiện ở nhiều trình độ và bằng nhiều phương thức khác nhau, tạo ra hai hệ thống tri thức chính:

- Tri Thức Kinh Nghiệm: Được hình thành từ quá trình tích lũy kinh nghiệm thực tiễn và truyền lại qua các thế hệ.
- Tri Thức Khoa Học: Được phát triển dựa trên các phương pháp khoa học, mang tính hệ thống và có cơ sở lý thuyết chặt chẽ.

Nói tóm lại, khoa học là một hệ thống tri thức phức tạp và không ngừng phát triển, giúp con người hiểu biết sâu hơn về thế giới xung quanh. Để đạt được tri thức khoa học, con người cần có sự tò mò, thái độ hoài nghi và phương pháp khoa học. Tri thức khoa học không chỉ dừng lại ở việc thu thập thông tin mà còn phải tổ chức, sắp xếp và lý thuyết hóa để hiểu rõ hơn về bản chất của các hiện tượng.

3.3. Thế nào là tri thức kinh nghiệm?

Tri thức kinh nghiệm là hệ thống tri thức được tích lũy một cách ngẫu nhiên trong quá trình hoạt động của con người. Hệ thống này được hình thành qua các hoạt động thực tiễn như lao động sản xuất, chiến đấu bảo vệ cuộc sống của cộng đồng, thông qua hoạt động tư duy của con người và được truyền lại qua các thế hệ bằng nhiều con đường khác nhau.

Con người có thể hình dung được sự vật, biết cách phản ứng trước tự nhiên và biết cách ứng xử trong các quan hệ xã hội nhờ vào tri thức kinh nghiệm. Hệ thống tri thức này ngày càng phong phú và được tích lũy qua các năm, các thế hệ, đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển của loài người.

Tri thức kinh nghiệm giúp con người nhận thức được những đặc điểm bên ngoài của sự vật, hiện tượng. Đây là cơ sở quan trọng cho sự hình thành tri thức khoa học. Tuy nhiên, tri thức kinh nghiệm thường mang tính rời rạc, thiếu cơ sở khoa học và bị hạn chế trong việc giải thích và vận dụng để cải tạo thế giới. Do đó, tri thức kinh nghiệm chỉ giúp con người phát triển đến một khuôn khổ nhất định mà chưa thể đi sâu vào bản chất các sự vật và hiện tượng. Tri thức kinh nghiệm có vai trò như sau:

- **Nhận Thức và Phản Ứng**: Tri thức kinh nghiệm giúp con người hình dung và nhận thức được sự vật, biết cách phản ứng trước các hiện tượng tự nhiên và xã hội.
- **Ứng Xử Xã Hội**: Hệ thống tri thức này cung cấp cho con người những phương pháp ứng xử phù hợp trong các mối quan hệ xã hội.
- **Phát Triển Qua Thế Hệ**: Tri thức kinh nghiệm được tích lũy và truyền lại qua các thế hệ, làm phong phú thêm kho tàng kiến thức của nhân loại.
- **Cơ Sở Hình Thành Tri Thức Khoa Học**: Tri thức kinh nghiệm là nền tảng để phát triển tri thức khoa học, giúp con người nhận thức ban đầu về các đặc điểm bên ngoài của sự vật và hiện tượng.

Tuy nhiên, tri thức kinh nghiệm vẫn có những hạn chế nhất định

- **Tính Rời Rạc**: Tri thức kinh nghiệm thường không được hệ thống hóa một cách chặt chẽ, mà mang tính rời rạc và phân tán.
- **Thiếu Cơ Sở Khoa Học**: Do không dựa trên cơ sở khoa học vững chắc, tri thức kinh nghiệm bị hạn chế trong việc giải thích các hiện tượng phức tạp và không thể đi sâu vào bản chất của sự vật.
- **Giới Hạn Trong Vận Dụng**: Khả năng vận dụng tri thức kinh nghiệm để cải tạo thế giới còn hạn chế, chỉ giúp con người phát triển đến một mức độ nhất định mà không thể tiếp tục khám phá và hiểu biết sâu hơn về tự nhiên và xã hội.

3.4. Thế nào là tri thức khoa học?

Tri thức khoa học là hệ thống tri thức được tích lũy một cách có hệ thống thông qua hoạt động nghiên cứu khoa học. Quá trình này được tiến hành theo một mục tiêu xác định và sử dụng các phương pháp khoa học để thu thập, phân tích và khái quát hóa thông tin. Khác với tri thức kinh nghiệm, tri thức khoa học không chỉ dừng lại ở việc thu thập những tập hợp số liệu và sự kiện ngẫu nhiên, mà còn khái quát hóa chúng thành cơ sở lý thuyết để hiểu rõ bản chất của sự vật và hiện tượng trong thế giới khách quan.

Tri thức khoa học được phát triển qua nhiều bước cụ thể:

- **Quan sát và Thu Thập Dữ Liệu**: Bắt đầu từ việc quan sát các hiện tượng tự nhiên và xã hội, ghi chép lại các sự kiện và số liệu.
- **Thực Nghiệm và Phân Tích**: Tiếp theo là thực hiện các thí nghiệm để kiểm tra giả thuyết, sử dụng các phương pháp phân tích dữ liệu để xác định các mô hình và xu hướng.
- **Khái Quát Hóa**: Từ những dữ liệu thu thập được, các nhà khoa học phát triển các lý thuyết và mô hình để giải thích bản chất của các hiện tượng, khái quát hóa từ những trường hợp cụ thể để tạo ra các nguyên lý chung.

Tri thức khoa học đóng vai trò vô cùng quan trọng trong đời sống con người và sự phát triển của xã hội:

- **Nhận Thức Thế Giới**: Tri thức khoa học giúp con người hiểu rõ hơn về thế giới xung quanh, từ các nguyên lý cơ bản của tự nhiên đến các hiện tượng xã hội phức tạp.
- **Cải Tạo Thế Giới**: Tri thức khoa học cung cấp nền tảng cho việc phát triển các công nghệ mới, cải tiến quy trình sản xuất, và giải quyết các vấn đề thực tiễn trong cuộc sống.

- **Thể Hiện trong Các Môn Học**: Các môn học như vật lý học, hóa học, sinh học, xã hội học, đều dựa trên tri thức khoa học để nghiên cứu và giảng dạy, giúp lan tỏa tri thức này đến các thế hệ sau.

Tri thức khoa học không chỉ giúp con người tìm hiểu và giải thích các hiện tượng mà còn cho phép kiểm nghiệm và đánh giá tính đúng đắn của các tri thức kinh nghiệm:

- **Kiểm Nghiệm và Đánh Giá**: Các lý thuyết khoa học được kiểm nghiệm qua nhiều thí nghiệm và quan sát, đảm bảo tính chính xác và tin cậy. Điều này giúp loại bỏ những sai lầm và ngộ nhận từ tri thức kinh nghiệm.
- **Vận Dụng Sáng Tạo**: Tri thức khoa học có thể được áp dụng một cách sáng tạo vào nhiều lĩnh vực khác nhau, từ y học, kỹ thuật, đến kinh tế và xã hội, mở rộng khả năng giải quyết vấn đề và tạo ra những tiến bộ vượt bậc.

Tri thức khoa học góp phần quan trọng vào mọi thành tựu và tiến bộ trong lịch sử phát triển của văn minh nhân loại. Nó giúp con người nhận thức đúng đắn, đầy đủ về sự vật và hiện tượng, đồng thời đảm bảo sự phát triển bền vững:

- **Thành Tựu Khoa Học và Công Nghệ**: Những phát minh và phát kiến khoa học đã thay đổi hoàn toàn cách con người sống và làm việc, từ việc khám phá ra điện, phát triển máy tính, đến công nghệ sinh học và y học hiện đại.
- **Phát Triển Kinh Tế và Xã Hội**: Tri thức khoa học thúc đẩy sự phát triển kinh tế qua việc cải tiến quy trình sản xuất, nâng cao năng suất và chất lượng sản phẩm. Đồng thời, nó cũng góp phần giải quyết các vấn đề xã hội như sức khỏe, giáo dục, và môi trường.
- **Cơ Sở Cải Tạo Thế Giới**: Tri thức khoa học cung cấp cơ sở lý thuyết và công cụ thực tiễn để con người có thể cải tạo thế giới, từ việc xây dựng các

công trình kiến trúc, phát triển hạ tầng giao thông, đến việc bảo vệ và khôi phục môi trường tự nhiên.

Tóm lại, tri thức khoa học là một tài sản vô giá của loài người, không chỉ giúp chúng ta hiểu rõ hơn về thế giới mà còn cung cấp những công cụ cần thiết để cải thiện và phát triển xã hội. Sự phát triển của tri thức khoa học là động lực quan trọng cho mọi tiến bộ và thành tựu của nhân loại.

3.5. Sự khác biệt giữa tri thức kinh nghiệm và tri thức khoa học

Tri thức kinh nghiệm và tri thức khoa học là hai hệ thống tri thức của con người, khác nhau về nguồn gốc, cách thức hình thành và mức độ chính xác. Tri thức kinh nghiệm được tích lũy một cách ngẫu nhiên thông qua các hoạt động thực tiễn, lao động sản xuất, và qua quá trình tư duy của con người. Nó phản ánh những hiểu biết và kỹ năng được truyền lại qua các thế hệ, giúp con người hình dung về sự vật, phản ứng trước tự nhiên và ứng xử trong xã hội. Tri thức kinh nghiệm thường mang tính rời rạc, thiếu cơ sở khoa học và bị hạn chế trong việc giải thích các hiện tượng phức tạp, do đó chỉ giúp con người phát triển đến một mức độ nhất định.

Ngược lại, tri thức khoa học là hệ thống tri thức được tích lũy một cách hệ thống thông qua hoạt động nghiên cứu khoa học, với mục tiêu xác định và bằng những phương pháp khoa học. Tri thức khoa học tổng kết những tập hợp số liệu và sự kiện ngẫu nhiên để khái quát hóa thành các cơ sở lý thuyết về bản chất của sự vật và hiện tượng trong thế giới khách quan. Đây là kho tàng tri thức quan trọng của loài người, đóng vai trò thiết yếu trong việc nhận thức và cải tạo thế giới. Tri thức khoa học giúp con người hiểu rõ bản chất của các hiện tượng, kiểm nghiệm và đánh giá tính đúng đắn của tri thức kinh nghiệm, và vận dụng sáng tạo để giải quyết các vấn đề trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Tóm lại, tri thức kinh nghiệm và tri thức khoa học đều đóng góp quan trọng vào sự phát triển của nhân loại, nhưng tri thức khoa học vượt trội hơn ở tính hệ thống, cơ sở lý thuyết và khả năng giải thích, cải tạo thế giới một cách toàn diện và chính xác hơn.

CHƯƠNG 4

MỤC ĐÍCH VÀ MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

Trong chương này, chúng tôi trình bày hai vấn đề cơ sở và bắt đầu trong nghiên cứu khoa học: mục đích và mục tiêu nghiên cứu. Chúng tôi tập trung phân tích sư khát biệt giữa hai khái niệm này.

4.1. Thế nào là mục tiêu nghiên cứu?

Mục tiêu nghiên cứu (research objective) là những nội dung cụ thể cần được xem xét và làm rõ trong khuôn khổ đối tượng nghiên cứu đã xác định, nhằm trả lời câu hỏi ”Nghiên cứu cái gì?”. Đây là các mục tiêu cụ thể mà nhà nghiên cứu đặt ra để đạt được trong quá trình nghiên cứu, giúp định hình phạm vi và hướng đi của nghiên cứu.

Vai trò của mục tiêu nghiên cứu như sau:

- **Định Hướng Nghiên Cứu**: Mục tiêu nghiên cứu giúp xác định rõ ràng các vấn đề, hiện tượng hoặc mối quan hệ mà nghiên cứu sẽ tập trung vào. Điều này giúp nghiên cứu không bị lan man, tập trung vào những nội dung cần thiết và có giá trị.

- **Xác Định Phương Pháp Nghiên Cứu**: Dựa trên mục tiêu nghiên cứu, nhà nghiên cứu có thể lựa chọn các phương pháp và công cụ nghiên cứu phù hợp để thu thập và phân tích dữ liệu. Ví dụ, nếu mục tiêu là xác định mối quan hệ giữa hai biến số, thì phương pháp nghiên cứu định lượng có thể được áp dụng.

- **Xây Dựng Câu Hỏi Nghiên Cứu**: Từ mục tiêu nghiên cứu, các câu hỏi nghiên cứu được xây dựng để làm rõ từng khía cạnh cụ thể của vấn đề cần nghiên cứu. Các câu hỏi này giúp hướng dẫn quá trình thu thập dữ liệu và phân tích, đảm bảo rằng mọi khía cạnh của mục tiêu đều được xem xét.

Quá trình xây dựng mục tiêu nghiên cứu như sau:

- **Xác Định Vấn Đề Nghiên Cứu**: Trước tiên, nhà nghiên cứu phải xác định được vấn đề hoặc hiện tượng cần nghiên cứu. Điều này có thể xuất phát từ một khoảng trống trong kiến thức hiện tại hoặc từ một nhu cầu thực tiễn cần được giải quyết.
- **Thiết Lập Mục Tiêu Tổng Quát**: Mục tiêu tổng quát thường là một tuyên bố rộng, phản ánh mục đích chính của nghiên cứu. Nó thường liên quan đến việc khám phá, mô tả hoặc giải thích một hiện tượng cụ thể.
- **Thiết Lập Mục Tiêu Cụ Thể**: Mục tiêu cụ thể là những tuyên bố chi tiết hơn, xác định các khía cạnh cụ thể của vấn đề cần được xem xét. Các mục tiêu cụ thể này thường liên quan trực tiếp đến các câu hỏi nghiên cứu.

Xem xét ví dụ như sau: Nếu nghiên cứu tập trung vào việc "Đánh giá ảnh hưởng của việc học trực tuyến đến kết quả học tập của sinh viên đại học", mục tiêu nghiên cứu có thể được thiết lập như sau:

- **Mục Tiêu Tổng Quát**: Đánh giá tổng thể ảnh hưởng của việc học trực tuyến đến kết quả học tập của sinh viên.
- **Mục Tiêu Cụ Thể**: So sánh kết quả học tập giữa sinh viên học trực tuyến và sinh viên học truyền thống; Xác định các yếu tố ảnh hưởng đến hiệu quả học tập trực tuyến của sinh viên; Khảo sát mức độ hài lòng của sinh viên đối với hình thức học trực tuyến.

Nói tóm lại, mục tiêu nghiên cứu là một phần quan trọng trong quá trình nghiên cứu khoa học, giúp định hướng và tập trung vào các nội dung cần thiết. Việc xác định mục tiêu rõ ràng và chi tiết không chỉ giúp nghiên cứu đạt được kết quả chính xác mà còn góp phần vào việc phát triển kiến thức mới và ứng dụng vào thực tiễn.

4.2. Thế nào là mục đích nghiên cứu?

Mục đích nghiên cứu (research purpose) là ý nghĩa thực tiễn của nghiên cứu, trả lời cho câu hỏi "Nghiên cứu nhằm vào việc gì?"hoặc "Nghiên cứu để phục vụ cho cái gì?". Đây là yếu tố quan trọng xác định lý do và giá trị của việc tiến hành một nghiên cứu cụ thể, đồng thời định hình hướng đi và mục tiêu cuối cùng của nghiên cứu.

Mục đích nghiên cứu cần phải đảm bảo các ý sau:

- **Ý Nghĩa Thực Tiễn**: Mục đích nghiên cứu nhấn mạnh tầm quan trọng và ứng dụng thực tế của nghiên cứu trong đời sống, khoa học hoặc công nghệ. Nó giúp xác định rõ ràng lý do vì sao nghiên cứu này cần được thực hiện và những lợi ích cụ thể mà nó mang lại.

- **Định Hướng và Phục Vụ**: Mục đích nghiên cứu giúp định hướng cho toàn bộ quá trình nghiên cứu, từ việc xác định vấn đề, xây dựng mục tiêu và câu hỏi nghiên cứu, đến lựa chọn phương pháp và phân tích kết quả. Nó trả lời cho câu hỏi nghiên cứu nhằm phục vụ cho điều gì, chẳng hạn như giải quyết một vấn đề xã hội, cải tiến một quy trình công nghệ, hay mở rộng kiến thức trong một lĩnh vực khoa học cụ thể.

- **Động Lực và Lý Do**: Mục đích nghiên cứu cung cấp động lực và lý do cho các nhà nghiên cứu và các bên liên quan, giúp họ hiểu rõ tầm quan trọng của nghiên cứu và cam kết với quá trình thực hiện. Nó làm rõ những lợi ích tiềm năng mà nghiên cứu có thể mang lại, không chỉ cho lĩnh vực nghiên cứu cụ thể mà còn cho cộng đồng hoặc xã hội nói chung.

Xem xét ví dụ: Nếu nghiên cứu tập trung vào "Tìm hiểu tác động của ô nhiễm không khí đến sức khỏe cộng đồng tại thành phố X", mục đích nghiên cứu có thể được trình bày như sau:

- **Giải Quyết Vấn Đề Thực Tiễn**: Nghiên cứu nhằm xác định mức độ và loại ô nhiễm không khí đang ảnh hưởng đến sức khỏe của người dân thành phố X, từ đó đưa ra các giải pháp giảm thiểu tác động tiêu cực.

- **Cung Cấp Thông Tin Cho Chính Sách**: Kết quả nghiên cứu sẽ cung cấp dữ liệu quan trọng để hỗ trợ các cơ quan chức năng trong việc xây dựng và triển khai các chính sách bảo vệ môi trường và sức khỏe cộng đồng.
- **Nâng Cao Nhận Thức Cộng Đồng**: Mục đích nghiên cứu còn nhằm nâng cao nhận thức của người dân về vấn đề ô nhiễm không khí và khuyến khích họ tham gia vào các hoạt động bảo vệ môi trường.

Nói tóm lại, mục đích nghiên cứu là một thành phần cốt lõi trong quá trình nghiên cứu, xác định rõ ý nghĩa thực tiễn và giá trị của nghiên cứu. Nó không chỉ định hướng và định hình toàn bộ quá trình nghiên cứu mà còn cung cấp lý do và động lực cho các nhà nghiên cứu và các bên liên quan. Việc xác định mục đích nghiên cứu rõ ràng và chi tiết đảm bảo rằng nghiên cứu không chỉ mang lại kiến thức mới mà còn có thể ứng dụng và mang lại lợi ích cụ thể cho xã hội.

4.3. Sự khác biệt giữa mục đích và mục tiêu nghiên cứu

Mặc dù mục đích và mục tiêu nghiên cứu đều là những thành phần quan trọng trong quá trình nghiên cứu, nhưng chúng khác nhau về bản chất và vai trò. Mục đích nghiên cứu (research purpose) là ý nghĩa thực tiễn của nghiên cứu, trả lời cho câu hỏi "Nghiên cứu nhằm vào việc gì?"hoặc "Nghiên cứu để phục vụ cho cái gì?". Nó định rõ lý do và giá trị thực tế của việc thực hiện nghiên cứu, nhấn mạnh tầm quan trọng và ứng dụng của nghiên cứu trong đời sống hoặc khoa học. Mục đích nghiên cứu cung cấp động lực và lý do cho các nhà nghiên cứu và các bên liên quan, giúp họ hiểu rõ tầm quan trọng của nghiên cứu và cam kết với quá trình thực hiện.

Ngược lại, mục tiêu nghiên cứu (research objective) là những nội dung cụ thể cần được xem xét và làm rõ trong khuôn khổ đối tượng nghiên cứu đã xác định, nhằm trả lời câu hỏi "Nghiên cứu cái gì?". Mục tiêu nghiên cứu xác định rõ ràng các vấn đề, hiện tượng hoặc mối quan hệ mà nghiên cứu hướng đến, đóng vai trò làm kim chỉ nam cho toàn bộ quá trình nghiên cứu. Nó giúp xác định phạm vi, hướng đi và phương pháp nghiên cứu, từ đó xây dựng các câu hỏi nghiên cứu cụ thể để điều tra và phân tích.

Tóm lại, mục đích nghiên cứu nhấn mạnh vào lý do và ý nghĩa thực tiễn của nghiên cứu, còn mục tiêu nghiên cứu tập trung vào các nội dung cụ thể và chi tiết cần được nghiên cứu để đạt được mục đích đó. Mục đích nghiên cứu định hướng tổng thể và giá trị của nghiên cứu, trong khi mục tiêu nghiên cứu xác định các bước và phương pháp cụ thể để thực hiện nghiên cứu.

CHƯƠNG 5
PHẨM CHẤT TRONG NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về vấn đề các phẩm chất trong nghiên cứu khoa học. Chúng tôi dựa trên nhận định của GS. Ngô Bảo Châu – cựu học sinh của Khối THPT chuyên Toán, Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN về vấn đề này. Một công trình khoa học cần có là 3 phẩm chất theo thứ tự: Đúng và trung thực, mới và hay. Nhưng quan trọng nhất là đúng và trung thực.

5.1. Đúng trong nghiên cứu khoa học

Trong nghiên cứu khoa học, tính đúng đắn là vô cùng quan trọng. Đúng đắn không chỉ đơn thuần là việc áp dụng các phương pháp và quy trình nghiên cứu một cách chính xác, mà còn liên quan đến sự khai thác hiệu quả những công cụ và kiến thức hiện đại nhất có sẵn. Các nhà nghiên cứu cần đảm bảo rằng mọi hoạt động nghiên cứu từ thu thập dữ liệu, thiết kế thí nghiệm, phân tích số liệu đến báo cáo kết quả đều được thực hiện với mức độ chính xác và khách quan cao nhất có thể.

Trong quá trình nghiên cứu, tính đúng đắn yêu cầu sự tỉ mỉ và cẩn trọng. Phải đảm bảo rằng mọi dữ liệu thu thập là chính xác và không bị sai sót, các phương pháp thí nghiệm được thiết kế và thực hiện đúng theo đúng qui trình khoa học. Điều này đảm bảo rằng kết quả nghiên cứu đưa ra là có tính xác thực và có thể tái sản xuất được bởi các nhà nghiên cứu khác.

5.2. Trung thực trong nghiên cứu khoa học

Trung thực là một yếu tố căn bản và không thể thiếu trong nghiên cứu khoa học. Nó đòi hỏi các nhà nghiên cứu phải có sự thẳng thắn và minh bạch trong tất cả các khâu của quá trình nghiên cứu, từ thu thập dữ liệu, xử lý số liệu, đến báo cáo kết quả. Trung thực bảo đảm rằng mọi thông tin được đưa ra là chân thực và không bị bóp méo hoặc làm sai lệch.

Nghiên cứu khoa học trung thực đòi hỏi sự trung thực với chính mình và với cộng đồng khoa học. Các tác giả cần phải báo cáo mọi phương pháp và quy trình nghiên cứu một cách minh bạch và chính xác, đồng thời phải công bố cả những kết quả không như mong đợi. Điều này giúp cảnh báo và ngăn ngừa sự phát sinh của bias (thiên lệch) trong nghiên cứu, giúp bảo vệ uy tín cá nhân và uy tín của tổ chức nghiên cứu.

5.3. Mới và hay trong nghiên cứu khoa học

Mới và hay là những tiêu chí quan trọng để đánh giá giá trị và ảnh hưởng của một công trình nghiên cứu trong cộng đồng khoa học. Mới đề cập đến tính sáng tạo và đổi mới của các ý tưởng nghiên cứu, tức là khả năng đưa ra các giải pháp hoặc phương pháp mới cho các vấn đề nghiên cứu hiện tại. Các nghiên cứu mới thường mang lại những thông tin, dữ liệu hoặc thậm chí các lý thuyết mới mà trước đó chưa từng được khám phá hoặc áp dụng, đóng góp một cách tích cực vào sự phát triển và tiến bộ của lĩnh vực đó.

Một nghiên cứu hay không chỉ đơn giản là mới mà còn phải đạt được sự gợi mở, thú vị và có giá trị sâu sắc trong lĩnh vực nghiên cứu tương ứng. Những nghiên cứu hay thường được đánh giá dựa trên khả năng giải quyết các vấn đề phức tạp, cung cấp các giải pháp hiệu quả, và góp phần vào sự phát triển và tiến bộ của lĩnh vực đó. Sự kết hợp giữa sự mới mẻ và sự hấp dẫn làm nên sự thành công của các nghiên cứu khoa học đáng chú ý, và cũng là tiêu chí để các nhà nghiên cứu và cộng đồng khoa học đánh giá và công nhận một công trình nghiên cứu.

CHƯƠNG 6

LỰA CHỌN ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

Trong chương này, chúng tôi thảo luận về vấn đề lựa chọn đề tài nghiên cứu khoa học. Đây là bước đầu tiên và cũng bước quan trọng để bắt đầu thực hiện một đề tài nghiên cứu khoa học.

6.1. Xác định đề tài, nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu

Bước này là bắt đầu của quá trình nghiên cứu, nơi mà nhà nghiên cứu xác định rõ ràng đề tài cụ thể mà họ sẽ nghiên cứu. Việc lựa chọn đề tài phải phù hợp với sở thích nghiên cứu của nhà nghiên cứu, đáp ứng nhu cầu hiện tại của cộng đồng khoa học và có khả năng đóng góp vào lĩnh vực nghiên cứu đang phát triển.

Xem xét ví dụ: Một nhóm nghiên cứu quyết định thực hiện nghiên cứu về "Tác động của việc sử dụng công nghệ AI trong giáo dục cơ sở và ảnh hưởng đến sự học tập của học sinh trung học."Đề tài đã được xác định rõ ràng là tác động của công nghệ AI trong giáo dục cơ sở. Nhiệm vụ của nghiên cứu là đo đạc và phân tích tác động của công nghệ AI đối với sự học tập của học sinh trung học. Đối tượng nghiên cứu là học sinh trung học, và cụ thể hơn, nhóm nghiên cứu có thể quyết định nghiên cứu trên một nhóm học sinh ở một số trường học cụ thể.

6.2. Xác định mục tiêu nghiên cứu

Sau khi xác định đề tài, mục tiêu nghiên cứu được xác định để chỉ ra những gì mà nghiên cứu sẽ cố gắng đạt được. Mục tiêu này cần phải rõ ràng, cụ thể và có thể đo lường được để hướng dẫn cho quá trình nghiên cứu.

Xem xét ví dụ: Mục tiêu của nghiên cứu là đánh giá cụ thể các ảnh hưởng của việc áp dụng công nghệ AI trong giáo dục, bao gồm cả mặt tích cực và tiêu cực, đến hiệu quả học tập của học sinh trung học.

6.3. Xác định mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu phản ánh ý nghĩa và giá trị thực tế của nghiên cứu đối với cộng đồng khoa học và xã hội. Nó giúp định hướng và làm rõ lý do tại sao nghiên cứu này cần phải được thực hiện và những lợi ích mà nó mang lại.

Xem xét ví dụ: Mục đích của nghiên cứu là cung cấp các dữ liệu và hiểu biết mới về tác động của công nghệ AI trong giáo dục cơ sở, từ đó đưa ra các đề xuất cải tiến và chính sách hỗ trợ để tối ưu hóa sự áp dụng công nghệ này trong học tập.

6.4. Đưa ra các câu hỏi nghiên cứu

Các câu hỏi nghiên cứu được xây dựng dựa trên mục tiêu nghiên cứu để chỉ ra những khía cạnh cụ thể mà nghiên cứu sẽ điều tra và giải quyết. Các câu hỏi này giúp hướng dẫn cho việc thu thập dữ liệu và phân tích kết quả.

Ví dụ, ta có thể xây dựng các câu hỏi nghiên cứu có thể bao gồm:

- Câu hỏi 1: Công nghệ AI làm thay đổi thế nào trong phương pháp giảng dạy và học tập so với các phương pháp truyền thống?
- Câu hỏi 2: Tác động của công nghệ AI đối với kết quả học tập và năng lực sáng tạo của học sinh như thế nào?
- Câu hỏi 3: Các yếu tố nào ảnh hưởng đến sự thành công của việc tích hợp công nghệ AI trong giáo dục cơ sở?

Các câu hỏi nghiên cứu phải phản ánh sự tò mò và nhu cầu giải quyết vấn đề trong lĩnh vực nghiên cứu. Chúng hướng dẫn cho việc thu thập dữ liệu và phân tích để giải quyết mục tiêu đã đặt ra.

6.5. Đặt ra các giả thuyết ban đầu

Giả thuyết ban đầu là các giả định dựa trên kiến thức hiện có và những quan sát sơ bộ, mà nghiên cứu sẽ kiểm tra và xác minh tính đúng đắn thông qua quá trình nghiên cứu.

Ví như đối về đề tài trên, ta có thể xây dựng các giả thuyết ban đầu:

- Giả thuyết 1: Công nghệ AI sẽ cải thiện hiệu quả giảng dạy và học tập so với các phương pháp truyền thống.
- Giả thuyết 2: Học sinh sử dụng công nghệ AI có khả năng phát triển năng lực sáng tạo cao hơn.
- Giả thuyết 3: Điều kiện hạ tầng và sự chuẩn bị của giáo viên ảnh hưởng đến hiệu quả của công nghệ AI trong giảng dạy.

6.6. Xác định đối tượng khảo sát và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng khảo sát và phạm vi nghiên cứu xác định các đơn vị nghiên cứu và khuôn khổ của nghiên cứu. Việc chọn đúng đối tượng và phạm vi nghiên cứu quyết định đến tính đại diện và áp dụng của kết quả nghiên cứu.

Ví dụ: Đối tượng khảo sát là các học sinh trung học từ một số trường công và tư ở thành phố A. Phạm vi nghiên cứu bao gồm việc phân tích tác động của công nghệ AI trong giáo dục cơ sở trong vòng 2 năm.

Xác định rõ đối tượng và phạm vi nghiên cứu giúp đảm bảo tính đại diện và áp dụng của kết quả nghiên cứu, đồng thời hạn chế rủi ro và tối ưu hóa tài nguyên nghiên cứu.

6.7. Vai trò của lựa chọn đề tài trong nghiên cứu khoa học

Quá trình lựa chọn đề tài trong nghiên cứu khoa học không chỉ đơn thuần là một quyết định đơn giản mà là một chuỗi các bước chi tiết và logic. Việc thực hiện mỗi bước một cách cẩn thận và hợp lý sẽ đảm bảo rằng nghiên cứu có một nền tảng vững chắc và có khả năng đem lại những kết quả có giá trị. Đặc biệt, việc xác định mục đích, mục tiêu, và các câu hỏi nghiên cứu cần phải rõ ràng và cụ thể để giúp định hướng và hướng dẫn cho toàn bộ quá trình nghiên cứu. Những quyết định này cũng đóng vai trò quan trọng trong việc phát triển kiến thức và ứng dụng của nghiên cứu vào thực tiễn.

CHƯƠNG 7
VAI TRÒ CỦA TẠP CHÍ MATHEMATICAL REVIEWS

Trong chương này, chúng tôi phân tích vai trò của tạp chí Mathematical reviews đối với các nhà toán học.

7.1. Tìm hiểu về tạp chí Mathematical reviews

Mathematical Reviews (MR) là một tạp chí chuyên ngành toán học được biên tập và xuất bản bởi American Mathematical Society (AMS). Được thành lập vào năm 1940, MR đã trở thành một nguồn tài liệu quan trọng trong cộng đồng toán học quốc tế. Tạp chí này chủ yếu tập trung vào việc đánh giá và cung cấp các bài báo toán học đã xuất bản, cũng như các công trình nghiên cứu mới trong các lĩnh vực đa dạng của toán học.

Mathematical Reviews không chỉ đơn thuần là một tạp chí xuất bản các bài báo, mà còn là một cơ sở dữ liệu toán học lớn, cung cấp thông tin chi tiết và đánh giá chuyên sâu về các bài báo được công bố trong hầu hết các tạp chí toán học hàng đầu trên thế giới. Nhờ vào sự công tác đánh giá chặt chẽ và khách quan, MR giúp cộng đồng toán học có cái nhìn tổng quát về các xu hướng nghiên cứu, những tiến bộ mới, cũng như những vấn đề cụ thể trong từng lĩnh vực nhỏ khác nhau của toán học.

7.2. Vai trò của tạp chí Mathematical reviews

Mathematical Reviews đóng vai trò rất quan trọng đối với các tác giả trong ngành Toán. Đầu tiên, MR cung cấp một công cụ tìm kiếm toàn diện cho các nghiên cứu toán học, giúp tác giả dễ dàng tìm kiếm và xem xét các công trình đã được xuất bản trước đây trong lĩnh vực của họ. Thông qua các đánh giá và trích dẫn trong MR, tác giả có thể hiểu được sự phản ảnh của các công trình nghiên cứu của mình đối với cộng đồng toán học và đánh giá được độ quan trọng của chúng.

Thứ hai, MR giúp tác giả giới thiệu và phổ biến nghiên cứu của mình đến cộng đồng toán học quốc tế. Các bài báo được trích dẫn nhiều trong MR thường thu hút sự quan tâm và sự chú ý của các nhà nghiên cứu khác, từ đó tăng cơ hội được trích dẫn và công nhận trong lĩnh vực toán học. Điều này không chỉ làm tăng khả năng lan truyền và ảnh hưởng của các công trình nghiên cứu, mà còn giúp xây dựng và mở rộng mạng lưới quan hệ và hợp tác nghiên cứu toán học trên toàn thế giới.

Tóm lại, Mathematical Reviews không chỉ là một công cụ hữu ích cho việc nghiên cứu toán học mà còn là một phần không thể thiếu trong việc thúc đẩy sự phát triển và giao lưu nghiên cứu của cộng đồng toán học toàn cầu.

CHƯƠNG 8
BÌNH LUẬN VỀ IMPACT FACTOR

Trong chương này, chúng tôi bình luận về impact factor của một tạp chí khoa học, vai trò của nó trong việc lựa chọn tạp chí khoa học.

8.1. Impact factor là gì? Ý nghĩa của nó?

Impact Factor (IF) hay Journal Impact Factor (JIF) là một chỉ số quan trọng trong lĩnh vực xuất bản khoa học, được sử dụng để đo lường sự tác động của một tạp chí khoa học trong cộng đồng nghiên cứu. IF phản ánh số lượng trung bình các bài báo khoa học được trích dẫn trong một năm trên tạp chí đó. Chỉ số này được coi là một thước đo tương đối về độ quan trọng của tạp chí so với các tạp chí khác trong cùng lĩnh vực. Những tạp chí có IF cao thường được xem là có ảnh hưởng lớn hơn và có sức hút mạnh mẽ đối với các nhà nghiên cứu, nhà khoa học và các độc giả quan tâm đến lĩnh vực tương ứng.

IF được sử dụng như một proxy thống kê học để đại diện cho chất lượng và sức ảnh hưởng của một tạp chí khoa học. Người ta thường tin rằng việc xuất bản bài báo trong các tạp chí có IF cao sẽ giúp tăng khả năng được trích dẫn và công nhận trong cộng đồng nghiên cứu, từ đó thúc đẩy sự nghiên cứu và phát triển khoa học. Tuy nhiên, việc áp dụng IF cũng cần phải cân nhắc kỹ lưỡng, bởi IF không phải là một phép đo hoàn hảo và có những hạn chế riêng.

8.2. Impact factor thấp thì có đáng lo ngại?

Việc một tạp chí có Impact Factor (IF) thấp không nhất thiết là một lý do để lo ngại đối với tất cả các trường hợp. IF thấp có thể phản ánh nhiều yếu tố, bao gồm lịch sử xuất bản của tạp chí, lĩnh vực chuyên môn, và mức độ phổ biến của các nghiên cứu trong đó. Có một số lý do mà một tạp chí có IF thấp vẫn có thể đóng góp quan trọng đến cộng đồng nghiên cứu:

Thứ nhất, một số tạp chí chuyên biệt trong các lĩnh vực nhỏ hẹp hoặc mới nổi có thể có IF thấp do số lượng bài báo được xuất bản ít và quá trình trích dẫn diễn ra chậm. Tuy nhiên, những tạp chí này thường cung cấp nền tảng quan trọng cho các đề tài mới, các phương pháp nghiên cứu mới và các lĩnh vực nghiên cứu tiềm năng.

Thứ hai, IF không phản ánh chất lượng tất cả các bài báo trong tạp chí mà chỉ là một số liệu trung bình. Do đó, một số bài báo có thể không được trích dẫn nhiều nhưng vẫn mang lại những đóng góp quan trọng trong việc giải quyết các vấn đề nghiên cứu cụ thể.

Cuối cùng, IF thấp có thể thay đổi theo thời gian và không phải lúc nào cũng phản ánh chính xác sự phát triển và tiềm năng của một tạp chí. Việc đánh giá một tạp chí nên xem xét nhiều yếu tố khác nhau bao gồm chất lượng các bài báo, sự chuyên nghiệp của quy trình biên tập và sự hỗ trợ đối với tác giả.

Do đó, khi đánh giá về mức độ quan trọng của một tạp chí khoa học, cần phải xem xét không chỉ IF mà còn nhiều yếu tố khác để đảm bảo sự công bằng và đầy đủ trong việc đánh giá các công trình nghiên cứu.

CHƯƠNG 9

THÔNG TIN HỌC VIÊN

Câu hỏi. Hãy cho biết mã số chuyên ngành mà anh, chị đang theo học.

Trả lời. Mã số chuyên ngành Toán ứng dụng: 8460112

CHƯƠNG 10
THIẾT KẾ LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Dựa theo những văn bản hướng dẫn của trường Đại học Khoa học Tự nhiên, trong chương này chúng tôi trình bày mẫu một luận văn thạc sĩ toán học.

Một luận văn thạc sĩ toán học bao gồm các thành phần như sau:

- Lời cam đoan
- Lời cảm ơn
- Trang thông tin luận văn (Bằng tiếng Việt)
- Trang thông tin luận văn (Bằng tiếng Anh)
- Danh mục các ký hiệu, chữ viết tắt
- Danh mục các bảng
- Danh mục các hình vẽ, đồ thị
- Lời nói đầu
- Chương 1: Giới thiệu
- Chương 2: Kiến thức chuẩn bị
- Chương 3, 4: Nội dung chính của luận văn
- Chương 5: Kết luận

Dưới đây là một luận văn mẫu dưới đề tài: *Nghiên cứu về chặn sai số toàn cục cho hệ bất phương lồi*

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ NHỰT NAM

NGHIÊN CỨU VỀ HẶN SAI SỐ TOÀN CỤC CHO HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ NHỰT NAM

NGHIÊN CỨU VỀ CHẶN SAI SỐ TOÀN CỤC CHO HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

CHUYÊN NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 84 60 112

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. NGUYỄN VĂN B

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2024

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY - HO CHI MINH

UNIVERSITY OF SCIENCE

LE NHUT NAM

A STUDY ON GLOBAL ERROR BOUNDS FOR CONVEX INEQUALITIES SYSTEMS

MASTER THESIS

Ho Chi Minh City - 2024

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY - HO CHI MINH

UNIVERSITY OF SCIENCE

LE NHUT NAM

A STUDY ON GLOBAL ERROR BOUNDS FOR CONVEX INEQUALITIES SYSTEMS

MASTER THESIS IN MATHEMATICS

MAJOR IN APPLIED MATHEMATICS

Code: 84 60 112

SUPERVISORS

Prof. Dr. NGUYEN VAN B

Ho Chi Minh City - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan luận văn thạc sĩ ngành Toán ứng dụng, với đề tài *Nghiên cứu về chặn sai số toàn cục cho hệ bất phương trình lồi* là công trình khoa học do Tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Nguyễn Văn B.

Những kết quả nghiên cứu của luận văn hoàn toàn trung thực và chính xác.

Học viên cao học

(Ký tên, ghi họ tên)

Lê Nhựt Nam

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin phép gửi lời cảm ơn chân thành đến Thầy hướng dẫn của tôi - GS. TS. Nguyễn Văn B - giảng viên khoa Toán - Tin học bộ môn Tối ưu và Hệ thống, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM đã trực tiếp hướng dẫn và giúp đỡ tận tình trong suốt quá trình nghiên cứu thực hiện luận văn này. Nhờ vào những định hướng, và góp ý quý giá của thầy, tôi đã hoàn thành trọn vẹn đề tài luận văn thạc sĩ khoa học của mình.

Tiếp theo, tôi xin gửi lời cảm ơn đến quý Thầy, Cô trong khoa Toán - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM đã nhiệt tình giảng dạy đã truyền đạt cho tôi những kiến thức sâu sắc về mặt chuyên môn lý thuyết và ứng dụng thực tiễn trong suốt quá trình học tập ở trường. Những điều này đã góp phần quan trọng trong việc hoàn thành luận văn thạc sĩ khoa học của tôi.

Bên cạnh đó, tôi xin gửi lời cảm ơn đến các bạn bè đồng nghiệp đã động viên, đóng góp ý kiến trong suốt quá trình nghiên cứu của tôi. Và trên hết, tôi xin cảm ơn gia đình tôi đã tạo mọi điều kiện để giúp tôi tập trung hoàn thành luận văn này.

Lê Nhựt Nam

MỤC LỤC

TRANG THÔNG TIN LUẬN VĂN

Tên đề tài luận văn: Nghiên cứu về chặn sai số toàn cục cho hệ bất phương trình lồi

Ngành: Toán Ứng Dụng

Mã số ngành: 84 60 112

Họ tên học viên cao học: Lê Nhựt Nam

Khóa đào tạo: 33/2023

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Nguyễn Văn B

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG.HCM

1. TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN VĂN

Luận văn này nghiên cứu sự tồn tại và đặc trưng của các giới hạn lỗi toàn cục cho các hàm lồi trong không gian Euclid, cung cấp các điều kiện cần và đủ mà không cần áp đặt các yêu cầu bổ sung lên các hàm hoặc tập nghiệm của chúng. Bằng cách tập trung vào không gian Euclid, chúng tôi đưa ra các điều kiện dễ kiểm tra, nâng cao tính ứng dụng thực tế.

Hơn nữa, chúng tôi khám phá các tính chất của đạo hàm dưới của hàm cực đại được hình thành từ một tập hợp tùy ý của các hàm lồi liên tục. Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng, dưới một giả định thích hợp, đạo hàm dưới của hàm cực đại này tương ứng với bao lồi của các đạo hàm dưới của các hàm thành phần tại các chỉ số đang hoạt động. Kết quả này mở rộng hiểu biết của chúng ta về mối quan hệ giữa các đạo hàm dưới của các hàm thành phần và hàm cực đại của chúng, cung cấp một góc nhìn mới về phân tích lồi.

Các ứng dụng của những phát hiện lý thuyết này đặc biệt có liên quan đến việc nghiên cứu các giới hạn lỗi toàn cục trong các hệ thống được đặc trưng bởi các bất đẳng thức tuyến tính và lồi vô hạn. Kết quả của chúng tôi không chỉ tổng quát hóa các lý thuyết hiện có mà còn cung cấp các tiêu chí thực tế dễ áp dụng hơn.

Xuyên suốt luận văn, nhiều ví dụ được đưa ra để minh họa những ưu điểm của các điều kiện đề xuất so với các điều kiện hiện có, chứng minh hiệu quả và tính hữu dụng cải thiện của phương pháp tiếp cận của chúng tôi trong nhiều ngữ cảnh khác nhau. Các ví dụ này nhấn mạnh tầm quan trọng thực tiễn của những đóng góp lý thuyết của chúng tôi, làm nổi bật tiềm năng ảnh hưởng đến việc giải quyết các vấn đề tối ưu hóa phức tạp liên quan đến các hàm lồi.

2. NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN VĂN

Luận văn này phát triển lý thuyết về đạo hàm dưới và đạo hàm dưới riêng biệt mà không cần các giả định về tính đóng hoặc tính nửa liên tục dưới của các tập hợp và hàm số. Điều này đánh dấu một bước tiến quan trọng so với các nghiên cứu trước đây, nơi mà các giả định này thường được xem là cần thiết. Bằng cách loại bỏ các yêu cầu khắt khe này, luận văn mở ra những cách tiếp cận linh hoạt hơn cho việc phân tích và ứng dụng các hàm lồi. Kết quả là, lý thuyết phát triển trong luận văn không chỉ dễ kiểm tra và áp dụng hơn mà còn mở rộng phạm vi của các bài toán tối ưu hóa có thể giải quyết, đặc biệt trong bối cảnh các hệ thống bất đẳng thức tuyến tính và lồi vô hạn.

3. CÁC ỨNG DỤNG/ KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU

Các ứng dụng của luận văn này đặc biệt có ảnh hưởng trong việc nghiên cứu các bài toán tối ưu hóa trong không gian Banach, tập trung vào tính chất Pshenichnyi-Levin-Valadier (PLV). Bằng cách thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính chất PLV mà không cần các giả định về tính đóng và tính nửa liên tục dưới, luận văn cung cấp một khung lý thuyết vững chắc để phân tích và giải quyết các bài toán tối ưu hóa phức tạp trong các không gian này. Điều này góp phần vào việc hiểu sâu hơn về các tính chất cấu trúc của các hàm lồi và bất đẳng thức trong không gian Banach, nâng cao khả năng giải quyết nhiều bài toán thực tế hơn. Các phát hiện này có ý nghĩa quan trọng đối với các lĩnh vực đòi hỏi kỹ thuật tối ưu hóa phức tạp, chẳng hạn như kinh tế, kỹ thuật và toán học ứng dụng, nơi tính chất PLV đóng vai trò quan trọng trong việc mô hình hóa và giải quyết các vấn đề thực tiễn.

TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN	**HỌC VIÊN CAO HỌC**
(Ký tên, họ tên)	(Ký tên, họ tên)

XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO

HIỆU TRƯỞNG

THESIS INFORMATION

Thesis title: A study on Global Error Bounds for Convex Inequalities Systems

Speciality: Applied Mathematics

Code: 84 60 112

Name of Master Student: Le Nhut Nam

Academic year: 33/2023

Supervisor: Prof. Dr. Nguyen Van B

At: VNUHCM - University of Science

1. SUMMARY

This thesis investigates the existence and characterization of global error bounds for convex functions in Euclidean spaces, providing necessary and sufficient conditions without imposing additional requirements on the functions or their solution sets. By focusing on Euclidean spaces, we derive conditions that are straightforward to verify, enhancing practical applicability.

Furthermore, we explore the subdifferential properties of the supremum function formed by an arbitrary family of convex continuous functions. Specifically, we demonstrate that, under a suitable assumption, the subdifferential of this supremum function corresponds to the convex hull of the subdifferentials of the individual functions at active indices. This result extends our understanding of the relationship between the subdifferentials of component functions and their supremum, offering a new perspective on convex analysis.

The applications of these theoretical findings are particularly relevant for the study of global error bounds in systems characterized by infinite linear and convex inequalities. Our results not only generalize existing theories but also

provide practical criteria that are simpler to apply.

Throughout the thesis, several examples illustrate the advantages of the proposed conditions over existing ones, demonstrating the improved efficacy and utility of our approach in various contexts. The examples underscore the practical significance of our theoretical contributions, highlighting their potential impact on solving complex optimization problems involving convex functions.

2. NOVELTY OF THESIS

This thesis introduces a novel approach by developing the theory of subdifferential and singular subdifferential without requiring any assumptions of closedness and lower semicontinuity on the sets and functions. This marks a significant advancement compared to previous research, where such assumptions were typically considered necessary. By eliminating these stringent requirements, the thesis offers more flexible approaches for the analysis and application of convex functions. As a result, the developed theory is not only easier to verify and apply but also extends the range of optimization problems that can be addressed, particularly in the context of systems with infinite linear and convex inequalities.

APPLICATIONS/ APPLICABILITY/ PERSPECTIVE

The applications of this thesis are particularly impactful in the study of optimization problems within Banach spaces, focusing on the Pshenichnyi-Levin-Valadier (PLV) property. By establishing necessary and sufficient conditions for the PLV property without the need for assumptions of closedness and lower semicontinuity, the thesis provides a robust framework for analyzing and solving complex optimization problems in these spaces. This contributes to a deeper understanding of the structural properties of convex functions and inequalities in Banach spaces, enhancing the ability to address a wider range of practical problems. The findings have significant implications for fields requiring sophisticated optimization techniques, such as economics, engineering, and applied mathematics, where the PLV property plays a critical role in modeling and solving real-world problems.

SUPERVISOR	**Master STUDENT**
(Ký tên, họ tên)	(Ký tên, họ tên)

CERTIFICATION

UNIVERSITY OF SCIENCE

PRESIDENT

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CHỮ VIẾT TẮT

Convex function	Hàm lồi
Subdifferential	Dưới vi phân
Singular subdifferential	Dưới vi phân kỳ dị

DANH MỤC CÁC BẢNG

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

LỜI NÓI ĐẦU

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu các điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của các chặn sai số toàn cục cho một hàm lồi mà *không cần* các điều kiện bổ trợ trên không gian hàm hay không gian nghiệm. Nói một cách cụ thể, chúng tôi đưa ra các đặc trưng cho các chặn sai số trong không gian Euclidean thông qua một số kiểm tra đơn giản. Kế tiếp, chúng tôi chứng minh dưới một giả định phù hợp rằng dưới vi phân của hàm chặn trên nhỏ nhất của một họ bất kỳ các hàm liên tục lồi trùng với bao lồi của dưới vi phân của các hàm tương ứng với chi số dương tại các điểm cho trước. Cuối cùng, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của các chặn sai số toàn cục cho hệ vô hạn các bất đẳng thức tuyến tính và lồi.

Nội dung luận văn bao gồm bốn chương:

Chương 1: Giới thiệu Trình bày nội dung chương 1.

Chương 2: Kiến thức chuẩn bị Trình bày các kiến thức chuẩn bị để từ đó làm tiền đề cho toàn bộ luận văn.

Chương 3: Chặn sai số toàn cục cho một hệ bất phương trình lồi Trình bày một số điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của chặn sai số toàn cục của một hệ bất phương trình lồi.

Chương 4: Điều kiện cần và đủ cho tính chất PLV, và ứng dụng Trình bày quy tắc để tính toán tập hợp dưới vi phân của chặn trên nhỏ nhất từng điểm của hàm lồi liên tục được định nghĩa trên không gian Banach. Từ đó, áp dụng để khám phá sự tồn tại của chặn sai số toàn cục cho hệ vô hạn bất phương trình lồi và tuyến tính.

CHƯƠNG 1

GIỚI THIỆU

Kết quả tiên phong của Hoffman về chặn sai số cho các hệ bất đẳng thức affine trong không gian hữu hạn chiều đã đóng một vai trò quan trọng trong các bài toán quy hoạch toán học. Nghiên cứu về sự tồn tại của các chặn sai số dẫn đến nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như phân tích độ nhạy, tính toán đạo hàm dưới và sự hội tụ của các phương pháp số, v.v. Hướng phát triển chính của các kết quả nổi tiếng của Hoffman cho đến nay là mở rộng chúng sang các hệ thống khác nhau trong các không gian vô hạn chiều. Robinson là một nhân vật quan trọng trong quá trình này từ đầu. Trong một công trình, ông đã chỉ ra rằng các chặn sai số toàn cục cho một hàm lồi liên tục tồn tại khi tập nghiệm bị chặn và điều kiện Slater được thỏa mãn. Ioffe đã nghiên cứu các chặn sai số (dưới một tên khác) dưới giả định rằng các hàm số là Lipschitz cục bộ trên các không gian Banach. Kể từ những công trình cơ bản này, rất nhiều đóng góp cho lý thuyết về các chặn sai số đã được thực hiện bởi nhiều tác giả. Nhìn chung, hầu hết các tiêu chí chặn sai số đều được trình bày cho các hàm liên tục, nửa liên tục dưới hoặc các ràng buộc trên tập nghiệm.

Nhớ lại rằng một tập con của không gian Banach được gọi là đều lồi nếu nó là giao của một họ tùy ý, có thể rỗng, các nửa không gian mở, và một hàm từ không gian Banach tới các số thực mở rộng được gọi là đều lồi nếu tập mở rộng của nó là một tập đều lồi. Đều lồi ban đầu được giới thiệu trong trường hợp hữu hạn chiều bởi Fenchel và từ đó trở thành một khái niệm đáng chú ý trong phân tích lồi. Đặc biệt, các bài toán tối ưu hóa đều lồi có nhiều ứng dụng và đã là đối tượng của nghiên cứu chuyên sâu trong vài thập kỷ qua. Cuốn chuyên khảo gần đây ”Even Convexity and Optimization”của Fajardo và các cộng sự là một tài liệu tham khảo xuất sắc cho những ai quan tâm đến chủ đề này. Như đã chỉ ra trong một số công trình gần đây, các hàm lồi nửa liên tục dưới là các trường hợp đặc biệt của các hàm đều lồi, trong khi bất kỳ hàm đều lồi nào cũng là hàm lồi. Điều này có nghĩa là lớp các hàm lồi rộng hơn đáng kể so với lớp các hàm lồi nửa liên tục dưới. Do đó, lý thuyết về các chặn sai số cho các hàm lồi mà không giả định tính nửa liên tục dưới là một chủ đề đáng để nghiên cứu.

Mặt khác, khái niệm về điều kiện đủ ràng buộc cho các hệ bất đẳng thức lồi hữu hạn cũng đóng một vai trò quan trọng trong tối ưu hóa. Nhiều mở rộng của khái niệm này đã được nghiên cứu trong tài liệu bằng cách tập trung vào các hệ vô hạn trong không gian vô hạn chiều. Lưu ý rằng nhiều tiêu chí cần và đủ cho sự tồn tại của các chặn sai số đã được trình bày thông qua các điều kiện đủ ràng buộc. Ví dụ, Zheng và Ng đã thiết lập một đặc trưng của các chặn sai số cục bộ cho các bất đẳng thức lồi dưới dạng điều kiện đủ ràng buộc cơ bản mạnh mẽ; sau đó Hu đã có một cải tiến đáng kể; Ngai đã chứng minh sự tương đương giữa chặn sai số toàn cục kiểu Lipschitz cho các hệ bất đẳng thức đa thức lồi hữu hạn và điều kiện đủ ràng buộc Abadie; Boţ và Csetnek đã cung cấp một tiêu chí đủ cho sự tồn tại của các chặn sai số toàn cục dưới dạng sự bị chặn của tập nghiệm và điều kiện đủ ràng buộc Slater, v.v. Gần đây, Chuong và Jeyakumar đã trình bày một số đặc trưng thú vị của các chặn sai số vững chắc cho các hệ bất đẳng thức tuyến tính dưới sự không chắc chắn dữ liệu thông qua các điều kiện liên quan đến điều kiện đủ ràng buộc cơ bản. Là một ứng dụng, họ đã suy ra sự tồn tại của các chặn sai số vững chắc trong các trường hợp không chắc chắn kịch bản thông thường và không chắc chắn khoảng. Ngoài ra, cần nhấn mạnh ở đây rằng các điều kiện đủ ràng buộc cho các hệ vô hạn có liên quan chặt chẽ đến cái gọi là tính chất Pshenichnyi-Levin-Valadier (gọi tắt là PLV).

Được truyền cảm hứng từ các quan sát trên, chúng tôi tinh chỉnh các kết quả gần đây theo hai hướng. Đầu tiên, chúng tôi nhận thấy rằng tính nửa liên tục dưới của một hàm lồi và các ràng buộc trên tập nghiệm trong lý thuyết các chặn sai số toàn cục có thể được bỏ qua. Thứ hai, chúng tôi mở rộng một kết quả (tính chất PLV) đã có từ các không gian hữu hạn chiều sang các không gian Banach tổng quát. Là các ứng dụng, chúng tôi trình bày các đặc trưng của các chặn sai số toàn cục cho các họ tùy ý của các hàm tuyến tính và lồi.

CHƯƠNG 2

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kiến thức chuẩn bị để từ đó làm tiền đề cho toàn bộ luận văn.

2.1. Hệ thống ký hiệu, các định nghĩa tiền đề

Xem xét không gian X là một không gian Banach bất kỳ với chuẩn $\|.\|$, và ghép nối chuẩn giữa không gian X và topo đối ngẫu của nó $X*$ được ký hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ta gọi $(\Lambda, \preccurlyeq)$ là một tập hữu hướng. Ta gọi một lưới trong X được đánh chỉ số bởi Λ là $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Cho trước một tập $C \subset X$, ta ký hiệu phần trong, bao đóng, bao, bao lồi, bao conic của C lần lượt là int$C$, $\overline{C}$, bd$C$, co$C$, và cone$C$. Khi tập C là một tập lồi, ext$C$ chỉ tập các điểm cực trị của C.

Ta ký hiệu $\mathbb{B}(x, r)$ là quả cầu mở trong X với tâm x và bán kính $r > 0$, còn $\overline{\mathbb{B}^*}(x^*, R)$ là quả cầu đóng trong X^* với tâm tại x^* và bán kính $R > 0$. Ta gọi $\mathbb{S}^*$ đại diện cho mặt cầu đơn vị của X^*.

Với một tập hợp khác rỗng $T \subset [0, +\infty)$ và $C \subset X$, ta quy ước rằng

$$TC := \begin{cases} \{tx \mid t \in T, x \in C\} & C \neq 0 \\ \{0\}, & \text{ngược lại} \end{cases} \tag{2.1}$$

Gọi $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi chính thường. Ta sử dụng các ký hiệu chuẩn như sau cho miền (domain) và epigraph của f:

$$\text{dom}f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \tag{2.2}$$

và

$$\text{epi}f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\} \tag{2.3}$$

Bởi vì $\text{dom}f$ lồi, do đó $\overline{\text{dom}f}$ lồi.

Ta cũng sử dụng định nghĩa dưới vi phân của f tại $\overline{x} \in \text{dom}f$ là tập hợp

$$\partial f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \leq f(x) - f(\overline{x}), \forall x \in X\} \tag{2.4}$$

Nếu $f(\overline{x}) = +\infty$ thì ta đặt $\partial f(\overline{x}) := \varnothing$. Với một tập lồi khác rỗng $C \subset X$, nón chuẩn của C tại $\overline{x} \in C$ được ký hiệu bởi $N_C(\overline{x})$ và được cho bởi:

$$N_C(\overline{x}) := \partial\delta_C(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \leq 0, \forall x \in C\} \tag{2.5}$$

trong đó $\delta_C(.)$ đại diện cho hàm chỉ của C và được định nghĩa bởi

$$\delta_C(.) := \begin{cases} 0 & x \in C \\ +\infty & \text{ngược lại} \end{cases} \tag{2.6}$$

Ta định nghĩa dưới vi phân kỳ dị của f tại $\overline{x} \in \text{dom}f$:

$$\partial^\infty f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, 0) \in N_{\text{epi}f}(\overline{x}, f(\overline{x}))\} \tag{2.7}$$

Nếu $f(\overline{x}) = +\infty$, ta coi $\partial^\infty f(\overline{x}) = \varnothing$. Và nó dễ dàng kiểm tra được:

$$\partial^\infty f(\overline{x}) = N_{\text{dom}f}(\overline{x}) \tag{2.8}$$

Các định nghĩa mà chúng tôi đề cập ở trên là về nón chuẩn, dưới vi phân và dưới vi phân kỳ dị mà chúng không yêu cầu về giả định tính đóng và nửa liên tục dưới trên các tập hợp và hàm.

2.2. Khai triển dưới vi phân

Phần này chúng tôi trình bày một bổ đề mà cho phép khai triển dưới vi phân $\partial f(\overline{x})$ dưới dạng tổng của $\partial f(\overline{x})$ và $\partial^{\infty} f(\overline{x})$.

Bổ đề 1. *Với $\overline{x} \in dom$, ta có:*

$$\partial f(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}) + \partial^{\infty} f(\overline{x}) \tag{2.9}$$

Chứng minh. Nếu $\partial f(\overline{x}) = \varnothing$, thì $\partial f(\overline{x}) + \partial^{\infty} f(\overline{x}) = \varnothing$, và do đó ta rút ra kết luận của bổ đề là điều hiển nhiên.

Ngược lại, đầu tiên ta nhận thấy tập hợp ở vế phải chứa tập hợp ở vế trái. Gọi bất kỳ $x^* \in \partial f(\overline{x})$, bất kỳ $y^* \in \partial^{\infty} f(\overline{x})$. Thì, với mọi $x \in \mathrm{dom} f$, ta có:

$$\langle x^*, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) \tag{2.10}$$

và

$$\langle y^*, x - \overline{x} \rangle + 0(f(x) - f(\overline{x})) \leq 0. \tag{2.11}$$

Bằng cách lấy tổng vế theo vế những bất đẳng thức này, ta thu được:

$$\langle x^* + y^*, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) \tag{2.12}$$

mà ám chỉ rằng $x^* + y^* \in \partial f(\overline{x})$. Chứng minh hoàn tất. □

2.3. Dưới vi phân của hàm khoảng cách

Gọi $\overline{x} \in \mathrm{dom} f$ và $h \in X$. Đạo hàm theo hướng của f tại $\overline{x}$ theo hướng h, được định nghĩa

$$f'(\overline{x}, h) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\overline{x} + th) - f(\overline{x})}{t} \tag{2.13}$$

khi mà giới hạn tồn tại. Nó hoàn toàn khả thi rằng $f'(\overline{x}, \cdot)$ có giá trị $-\infty$.

Hàm khoảng cách liên kết với $C \subset X$ được cho bởi công thức:

$$d(x, C) := \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\} \quad \text{với} \quad x \in X \tag{2.14}$$

với quy ước rằng $d(x, C) := +\infty$ khi $C = \varnothing$. Khi C là một tập lồi khác rỗng, dưới vi phân của hàm khoảng cách $d(\cdot, C)$ tại mọi điểm C được tính như sau:

$$\partial d(x, C) = N_C(x) \cap \mathbb{B}^* \quad \text{với mọi} \quad x \in C \tag{2.15}$$

Bổ đề 2. *Giả định rằng C là một tập con lồi đóng khác rỗng của X và $x^* \in \partial d(x, C)$. Thì $\|x^*\| = 1$ và tồn tại một dãy cực tiểu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong C của $d(x, C)$, tức là $d(x, C) = \lim_{n \to \infty} \|y_n - x\|$ và $y_n^* \in N_C(y_n)$ mà thỏa*

$$d(x, C) = \lim_{n \to \infty} \langle y_n^*, x - y_n \rangle \tag{2.16}$$

và

$$\|y_n^* - x^*\| \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty \tag{2.17}$$

Bổ đề 3. *Cho $x \in X$. Giả định rằng C là một tập con lồi đóng khác rỗng của X. Thì tồn tại một dãy nhỏ nhất $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong C với x và $y_n^* \in N_C(y_n)$ sao cho*

$$d(x, C) = \lim_{n \to \infty} \langle y_n^*, x - y_n \rangle \tag{2.18}$$

và

$$\limsup_{n \to \infty} \|y_n^*\| \leq 1 \tag{2.19}$$

CHƯƠNG 3

CHẶN SAI SỐ TOÀN CỤC CHO MỘT HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LỒI

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của chặn sai số toàn cục của một hệ bất phương trình lồi.

Ta gọi $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi. Xem xét bất đẳng thức

$$f(x) \leq 0 \tag{3.1}$$

Ta đặt S là tập nghiệm của (3.1), là:

$$S := \{x \in X \mid f(x) \leq 0\} \tag{3.2}$$

Trước tiên, ta định nghĩa về sự tồn tại của một chặn sai số toàn cục cho bài toán bất phương trình lồi như sau:

Định nghĩa 1. *Bất phương trình lồi (3.1) được gọi là có một chặn sai số toàn cục nếu tồn tại một số thực $\tau > 0$ mà:*

$$d(x, S) \leq \tau f_+(x) \quad \textit{với mọi} \quad x \in X \tag{3.3}$$

trong đó $f_+(x) := \max f(x), 0$.

Chúng ta giả định rằng các tập nghiệm thì khác rỗng và không tương đương đến toàn bộ không gian X. Lưu ý rằng bd$S \neq \varnothing$ bởi vì $S \neq X$. Hơn nữa, bởi vì f không được giả định rằng nó nửa liên tục dưới, nên giá trị của hàm này có âm, dương, hoặc vô hạn tại một điểm trong bd$S$ và nghiệm S có thể không đóng.

Một bổ đề quan trọng cho việc xây dựng chặn sai số toàn cục cho bất phương trình lồi mà không cần giả sử về nửa liên tục dưới như sau:

Bổ đề 4. *Với* $\overline{x} \in dom f$*, ta có:*

(i) Nếu $f(\overline{x}) = 0$ *thì* $\partial f_+(\overline{x}) = [0,1]\partial f(\overline{x}) + \partial^\infty f(\overline{x})$.

(ii) Nếu $f(\overline{x}) < 0$ *thì* $\partial f_+(\overline{x}) = \partial \delta_{domf}(\overline{x})$

3.1. Điều kiện cần cho sự tồn tại chặn sai số toàn cục

Một điều kiện cần cho sự tồn tại của chặn sai số toàn cục cho bất phương trình lồi (3.1) được phát biểu như sau:

Mệnh đề 1. *Nếu bất phương trình lồi* (3.1) *có một chặn sai số toàn cục thì tồn tại* $\tau > 0$ *sao cho với mọi* $y \in bdS \cap S$*, điều kiện sau phải được thỏa mãn:*

$$N_S(y) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0,\tau]\partial f(y) & \text{nếu } f(y) = 0 \text{ và } \partial f(y) \neq \varnothing, \\ \partial^\infty f(y) & \text{khác.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Chứng minh. Sẽ bổ sung chứng minh sau. □

Bởi vì tập hợp bd$S \cap S$ có khả năng rỗng, điều kiện cần (3.4) là chưa đủ. Tuy nhiên, trong trường hợp phần giao này khác rỗng, chúng ta sẽ không biết rằng liệu điều kiện (3.4) là đủ chưa. Tất nhiên, một điều kiện cần và đủ rõ ràng là điều đủ yếu (weakest sufficient condition).

3.2. Điều kiện đủ cho sự tồn tại chặn sai số toàn cục

Trong phần này, ta xem xét điều kiện đủ cho chặn sai số toàn cục của bất phương trình lồi (3.1). Từ đó, ta phân tích sự khác nhau giữa nó và điều kiện cần (3.4).

Định lý 3.2.1. *Xem xét bất phương trình lồi* (3.1)*. Giả định rằng tồn tại* $\tau > 0$ *sao cho với mọi* $y \in bdS$*, điều kiện sau hoàn toàn được thỏa:*

$$N_S(y) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0,\tau]\partial f(y) & \text{if } 0 \leq f(y) < +\infty \quad \text{và } \partial f(y) \neq 0, \\ \partial \delta_{\overline{domf}}(y) & \text{nếu } f(y) = +\infty, \\ \partial^\infty f(y) & \text{khác.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Thì bất phương trình lồi (3.1) *có một chặn sai số toàn cục.*

Nhận xét 1. *Ta nhấn mạnh rằng Định lý 3.2.1 có thể không cần thiết cho sự tồn tại của một bất phương trình lồi. Ta xem xét ví dụ về nó ở Ví dụ.*

Nhận xét 2. *Quan sát thấy rằng trong nhiều đóng góp cho lý thuyết giới hạn sai số toàn cục/cục bộ của hàm lồi, giả định nửa liên tục dưới hoặc một số điều kiện trên tập nghiệm, chẳng hạn như tính đóng, giới hạn, v.v., đã được áp đặt. Khi cả* f *và* f_+ *không nửa liên tục dưới và tập nghiệm là không đóng và không bị chặn như trong các ví dụ sau, chúng ta có thể sử dụng Mệnh đề 1 và Định lý 3.2.1 để xác định sự không tồn tại hay tồn tại của giới hạn lỗi toàn cục.*

3.3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Cho hàm* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *được định nghĩa bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} x_1^2 + 3_x 1 + e^{-x_3} - 1 & \text{nếu } (x_1, x_2, x_3) \in (0,1] \times [-1,2] \times [-1,0], \\ 0, \quad \text{nếu } (x_1, x_2, x_3) \in \{0\} \times (-1,0] \times \{0\}, +\infty & \text{khác.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Ví dụ 2. *Đặt* $X = l^2$*, không gian của các dãy tổng bình phương của các số thực,* *và gọi $f : X \to \mathbb{R} \cup \{= \infty\}$ được cho bởi*

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x^i & \text{nếu } x^i < 0, \forall i \in \mathbb{N} \text{và } x^i \neq 0 \text{ với hầu khắp hữu hạn } i, \\ 1 \quad \text{nếu } x = (0, \dots), \\ +\infty & \text{khác.} \end{cases} \tag{3.7}$$

3.4. Với giả định tính đóng

Dưới giả định S đóng, sự tồn tại của chặn sai số toàn cục cho bất phương trình lồi (3.1) có thể được mô tả bằng nón chuẩn và dưới vi phân như sau:

Hệ quả 1. *Với bất phương trình lồi (3.1), giả định rằng S đóng. Thì bất phương trình lồi (3.1) có một chặn sai số toàn cục nếu và chỉ nếu tồn tại $\tau > 0$ sao cho với mọi $x \in bdS$, điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$N_S(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0, \tau]\partial f(x) & \text{nếu } f(x) = 0 \text{ và } \partial f(x) \neq \varnothing, \\ \partial^\infty f(y) & \text{khác.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Chứng minh. Sẽ bổ sung chứng minh sau. □

Nhận xét 3. *Hệ quả 1 tương đương với Định lý 3.2 trong [22], một mô tả về chặn sai số toàn cục trong thuật ngữ weak basic constraint qualification và "end set"của dưới vi phân.*

Trong thực hành, có thể không cần phải xác minh điều kiện cần và đủ.

3.5. Nghiên cứu trong hữu hạn chiều

Trong phần này, chúng tôi trình bày các trường hợp trong không gian hữu hạn chiều mà đơn giản hơn để kiểm tra sự tồn tại của chặn sai số toàn cục.

Định lý 3.5.1. *Với bất phương trình (3.1), giả định rằng $X = \mathbb{R}^n$. Và giả sử rằng S compact, và $bdS \subseteq f^{-1}(0)$. Thì bất phương trình (3.1) có một chặn sai số* *toàn cục nếu và chỉ nếu tồn tại $\tau > 0$ mà với mọi $x^e \in extS$ thỏa mãn điều kiện sau:*

$$N_S(x^e) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0,\tau]\partial f(x^e) & \text{nếu } \partial f(x^e) \neq \varnothing, \\ \partial^\infty f(x^e) & \text{nếu } \partial f(x^e) = \varnothing \end{cases} \tag{3.9}$$

Chứng minh. Sẽ bổ sung chứng minh sau. □

Trong một số trường hợp, tập hợp các điểm cực tri có thể nhỏ hơn tập các điểm biên. Ví dụ sau đây minh họa ưu điểm của Định lý 3.5.1 so với các kết quả trước đây. Hơn nữa, nó cũng cho thấy điều kiện (3.5) trong Định lý 3.2.1 là không cần thiết.

Ví dụ 3. *Hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được cho bởi*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \max\{e^{-x_1} - 1, |x_2|\} & \text{nếu } (x_1, x_2) \in (-\infty, 2] \times \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{khác.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Hệ quả 2. *Với bất phương trình (3.1), giả định rằng $X = \mathbb{R}^n$, f liên tục và S compact. Thì bất phương trình (3.1) có một chặn sai số toàn cục nếu và chỉ nếu tồn tại $\tau > 0$ mà với mọi $x^e \in extS$ mà thỏa điều kiện sau:*

$$N_S(x^e) \cap \mathbb{S}^* \subseteq (0,\tau]\partial f(x^e). \tag{3.11}$$

Chứng minh. Sẽ bổ sung chứng minh sau. □

Quan sát rằng khi tập nghiệm S compact và f liên tục, thì ta thường sử dụng điều kiện Slater để xác sự tồn tại của một chặn sai số toàn cục bởi vì nó là một điều kiện đủ đơn giản. Nhưng mà, điều kiện này có thể không thỏa trong một số tình huống khi mà Hệ quả 2 có thể được áp dụng. Chúng ta xem xét ví dụ minh họa sau đây.

Ví dụ 4. *Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi*

$$f(x) = \max\{g_1(x), g_2(x), 0\} \tag{3.12}$$

CHƯƠNG 4

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO TÍNH CHẤT PLV, VÀ ỨNG DỤNG

Trong chương này, chúng tôi trình bày một quy tắc để tính toán tập hợp dưới vi phân của chặn trên nhỏ nhất từng điểm của hàm lồi liên tục được định nghĩa trên không gian Banach. Kết quả này cùng với kết quả ở chương trước được áp dụng để khám phá sự tồn tại của chặn sai số toàn cục cho hệ vô hạn bất phương trình lồi và tuyến tính.

4.1. Mở đầu

Đặt $f_i : X \to \mathbb{R}, i \in I$ là một họ các hàm lồi chính thường, trong đó I là một tập hợp có chỉ số bất kỳ (không nhất thiết phải hữu hạn). Với mỗi $x \in X$, ta định nghĩa $F(x) := \sup_{i\in I}\{f_i(x)\}$ và tập chỉ số kích hoạt tại x là

$$I(x) := \{i \in I \mid f_i(x) = F(x)\}. \tag{4.1}$$

Ta luôn giả định rằng chặn trên nhỏ nhất của hàm $F(x) < +\infty$ với mọi $x \in X$.

Định nghĩa 2. *Họ hàm $\{f_i\}_{i\in I}$ được gọi là tính chất Pshenichnyi-Levin-Valadier (viết tắt là PLV) tại $x \in domF$ nếu*

$$\partial F(x) = co\left(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\right) \tag{4.2}$$

Định nghĩa này có một giả định rằng

$$\bigcup_{i \in \varnothing} \partial f_i(x) = \varnothing. \tag{4.3}$$

Định nghĩa 3. *Gọi $D : X \rightrightarrows X^*$ là một ánh xạ đa trị và $x \in X$. Thì D được gọi là nửa liên tục trên Kuratowski (uKsc) tại x nếu quan hệ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to x$, $x^*_\lambda \in D(x_\lambda)$ và $(x^*_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{w^*} x^*$ ám chỉ rằng $x^* \in D(x)$, trong đó $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to x$ (tương đương với, $(x^*_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{w^*} x^*$) có nghĩa là lưới $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ hội tụ về x tương ứng với chuẩn topo của X (tương đương với $(x^*_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ hội tụ về x^* tương ứng với topo yếu * của X^*). Ta nói D uKsc nếu nó là uKsc tại hầu khắp trong miền của nó.*

Ký hiệu trên về nửa liên tục trên Kuratowski (uKsc) được xem xét cho trường hợp cụ thể $X = \mathbb{R}^n$ và được sử dụng kể khám phá tính chất PLV.

Hơn nữa, nhắc lại rằng, một tập đa trị $T : X \rightrightarrows X^*$ được gọi là bị chặn cục bộ tại $\overline{x} \in X$ nếu tồn tại $r > 0$ mà $T(\mathbb{B}(\overline{x}, r))$ là một tập bị chặn.

Trước khi đi vào kết quả chính, ta sử dụng hai kết quả trong Bổ đề sau:

Bổ đề 5. *Gọi $g : X \to \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$ là một hàm lồi nửa liên tục dưới và $\overline{x} \in \overline{dom g}$ và gọi $(x_\lambda, x^*_\lambda) \in gph\partial g$ với mọi $\lambda \in \Lambda$. Thì:*

- *∂g bị chặn cục bộ tại $\overline{x}$ nếu và chỉ nếu $\overline{x} \in \overline{dom g}$.*
- *Nếu $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to \overline{x}, (x^*_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{w^*} x^*$ và lưới $(x^*_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ là chuẩn bị chặn thì $(\overline{x}, \overline{x}^*) \in gph\partial g$.*

Bổ đề 5 là một điều kiện đủ cho nửa liên tục trên Kuratowski của ∂g.

4.2. Kết quả chính

Phần này, chúng tôi trình bày về điều kiện cần và đủ cho tính chất PLV như sau:

Định lý 4.2.1. *Gọi f_i là hàm lồi liên tục với mọi $i \in I$ và gọi $\overline{x} \in X$. Đặt*

$$D(x) := co\left(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\right) \quad \text{với } x \in X \tag{4.4}$$

Giả sử rằng $I(z)$ khác rỗng với mọi z trong một lần cận của $\overline{x}$. Thì, $\partial F(\overline{x}) = D(\overline{x})$ nếu và chỉ nếu D là uKsc tại $\overline{x}$.

Chứng minh. Sẽ bổ sung chứng minh sau. □

Và bây giờ, ta áp dụng Định lý 4.2.1 để mà nghiên cứu lý thuyết chặn sai số. Gọi $f_i, i \in I$, và F như đã đề cập đầu chương. Xem xét hệ bất phương trình lồi:

$$f_i(x) \leq 0, \forall i \in I \tag{4.5}$$

Định nghĩa 4. *Hệ (4.5) được gọi là có một chặn sai số toàn cục nếu tồn tại một số thực $\tau > 0$ sao cho*

$$d(x, S_F) \leq \tau F_+(x) \quad \text{với mọi } x \in X, \tag{4.6}$$

trong đó $S_F := \{xX \mid f_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ và $F_+(x) := \max\{F(x), 0\}$. Ta cũng đặt $\tau_{\min}$ là chặn dưới lớn nhất của tất cả hằng chặn sai số τ thỏa điều kiện trên.

Mệnh đề sau đây mô tả đặc điểm của giới hạn lỗi toàn cục cho hệ (4.5).

Mệnh đề 2. *Gọi họ hàm $\{f_i\}_{i\in I}$ và D như trong Định lý 4.2.1. Giả định rằng với mọi $x \in bdS_F$, D là uKsc tại x và $I(z) \neq \varnothing$ với mọi z trong lân cận của x. Thì, hệ (4.5) có một chặn sai số toàn cục nếu và chỉ nếu tồn tại $\tau > 0$ sao cho với mọi $x \in bdS$ thỏa mãn điều kiện sau:*

$$N_{S_F}(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0,\tau]co\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big) & \text{nếu } F(x) = 0 \text{ và } \partial F(x) \neq \emptyset, \\ \partial^\infty F(x) \quad \text{khác} . \end{cases} \tag{4.7}$$

Chứng minh. Sẽ bổ sung chứng minh sau. □

4.3. Một số trường hợp đặc biệt

Sẽ bổ sung sau.

KẾT LUẬN

Luận án này trình bày cách xử lý các hàm lồi không có tính nửa liên tục dưới trong khuôn khổ lý thuyết giới hạn lỗi toàn cục. Sau khi cung cấp các điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của giới hạn sai số toàn cục của hàm lồi, chúng tôi đưa ra mô tả dưới vi phân của chặn trên nhỏ nhất của một họ tùy ý gồm các hàm liên tục lồi. Các kết quả thu được được áp dụng để rút ra các đặc tính cho sự tồn tại của giới hạn sai số toàn cục đối với các hệ bất đẳng thức tuyến tính vô hạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Anh:

[1] Vo Si Trong Long (2024), "On Global Error Bounds for Convex Inequalities Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **pages** 1–26.

CHƯƠNG 11

TÀI LIỆU ĐÍNH KÈM

Journal of Optimization Theory and Applications
https://doi.org/10.1007/s10957-024-02458-7

On Global Error Bounds for Convex Inequalities Systems

Vo Si Trong Long[1,2]

Received: 29 August 2023 / Accepted: 13 May 2024

Abstract
In this paper, we first present necessary and sufficient conditions for the existence of global error bounds for a convex function without additional conditions on the function or the solution set. In particular, we obtain characterizations of such global error bounds in Euclidean spaces, which are often simple to check. Second, we prove that under a suitable assumption the subdifferential of the supremum function of an arbitrary family of convex continuous functions coincides with the convex hull of the subdifferentials of functions corresponding to the active indices at given points. As applications, we study the existence of global error bounds for infinite systems of linear and convex inequalities. Several examples are provided as well to explain the advantages of our results with existing ones in the literature.

Keywords Convex inequality · Global error bounds · Infinite systems of convex inequalities · The PLV property · Uncertain linear inequality systems

Mathematics Subject Classification 90C25 · 90C34 · 90C05 · 49J52

1 Introduction

The pioneering results of Hoffman [20] on error bounds for systems of affine inequalities in finite dimensional spaces have played a vital role in the mathematical programming problems, see, e.g., the excellent survey papers [1, 3, 7, 13, 24, 26, 28, 37]. Studies of the existence of error bounds lead to a wide range of applications in many areas such as sensitivity analysis, subdifferential calculus and convergence of numerical methods etc., see, e.g., [2, 24, 25, 33, 44]. The main directions of developing Hoffman's famous results so far are extending them to various systems in infinite

Communicated by Juan Parra.

✉ Vo Si Trong Long
vstlong@hcmus.edu.vn

1 Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Science, Ho Chi Minh City, Vietnam

2 Vietnam National University, Ho Chi Minh, Vietnam

Published online: 30 May 2024

dimensional spaces. Robinson [39] was a crucial player in this process from the beginning. In [39], he showed that global error bounds for a continuous convex function hold when the solution set is bounded and the Slater condition is satisfied. Ioffe [23] studied error bounds (under a different name) under the assumption that functions are locally Lipschitz on Banach spaces. Since these fundamental works, a large number of contributions to the theory of error bounds have been made by many authors, see, e.g., [6, 7, 11, 13, 18, 30, 35, 36, 43, 45, 46] and the references therein. It should be noted that in the publications cited above, most of the error bound criteria were formulated for continuous, lower semicontinuous functions or restrictions on the solution set.

Recall that a subset of a Banach space is said to be evenly convex if it is the intersection of an arbitrary family, possibly empty, of open halfspaces, and a function from a Banach space to the extended real numbers is said to be evenly convex if its epigraph is an evenly convex set. *Even convexity* was initially introduced in the finite-dimensional case by Fenchel [17] and has since become a remarkable notion in convex analysis. In particular, evenly convex optimization problems have many applications and have been the subject of intensive research in the past several decades. The recent monograph "Even Convexity and Optimization" of Fajardo et al. [14] is an excellent reference for readers who are interested in this subject. As shown in [15, 40, 42], lower semicontinuous convex functions are special cases of evenly convex functions, while any evenly convex function is convex. This means that the class of convex functions is strictly broader than the class of lower semicontinuous convex functions. Therefore, the theory of error bounds for convex functions without assuming lower semicontinuity is a topic worth studying.

On the other hand, the notion of constraint qualification for finite systems of convex inequalities also plays an important role in optimization. Various extensions of this notion have been studied in the literature by focusing on considering infinite systems in infinite dimensional spaces, see e.g., [12, 16, 21, 29, 31, 32]. Observe that many necessary and sufficient criteria for the existence of error bounds were formulated by way of constraint qualification conditions. For instance, Zheng and Ng [46] established a characterization of local error bounds for convex inequalities in term of the strong basic constraint qualification; then Hu [22] has made a significant improvement of the result of [46]; Ngai [34] proved the equivalence between the Lipschitzian-type global error bound for systems of many finitely convex polynomial inequalities and the Abadie qualification condition; Boţ and Csetnek [6] provided a sufficient criterion for the existence of global error bounds in terms of the boundedness of the solution and the Slater qualification condition, etc. Recently, Chuong and Jeyakumar [8, 9] presented some interesting characterizations of robust error bounds for linear inequality systems under data uncertainty by way of basic constraint qualification-related conditions. As an application, they derived the existence of robust error bounds in the cases of commonly used scenario uncertainty and interval uncertainty. In addition, it should be emphasized here that constraint qualifications for infinite systems are closely related to the so-called Pshenichnyi-Levin-Valadier (PLV in short) property as shown in [32].

Inspired by the above observations, we refine the results of [6, 8–10, 22, 25, 32, 36, 46] in two directions. We notice first that the lower semicontinuity of a convex function and restrictions on the solution set in the theory of global error bounds can be omitted. Second, we extend a result (the PLV property) of [29] from finite dimension spaces to general Banach spaces. As applications, we present characterizations of global error bounds for arbitrary families of linear and convex functions.

The paper is organized as follows. In the next section, we provide some basic definitions and several auxiliary results. In Section 3, we present necessary and sufficient conditions for the existence of global error bound for an inequality defined by a single-valued convex function without any restrictions on the function or the solution set. Under additional conditions, we derive characterizations of such global error bounds by way of the normal cone and subdifferentials of the function at the boundary or extreme points of the solution set. In the last section, we establish a necessary and sufficient condition for the PLV property in Banach spaces. Using this result, we provide characterizations of global error bounds for infinite systems of convex inequalities and for linear inequality systems under data uncertainty.

2 Priliminaries

Throughout this paper (unless otherwise specified), the space X under consideration is arbitrary Banach with the norm $\|\cdot\|$, and the canonical pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle$ between X and its topological dual X^*. Let $(\Lambda, \preccurlyeq)$ be a directed set. A net in X indexed by Λ is denoted by $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Given a set $C \subset X$ we use int C, $\overline{C}$, bd C, co C and cone C to denote the interior, closure, boundary, convex hull and conic hull of C, respectively. When C is convex, ext C signifies the set of extreme points of C. We also denote the open ball in X with center at x and radius $r > 0$ by $\mathbb{B}(x, r)$, while $\overline{\mathbb{B}^*}(x^*, R)$ stands for the closed ball in X^* with center at x^* and radius $R > 0$. Let $\mathbb{S}^*$ stands for the the unit sphere of X^*. As usual, $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$ denote the set of the natural numbers and that of the real numbers, respectively. For a non-empty set $T \subset [0, +\infty)$ and $C \subset X$, we adopt the convention that

$$TC := \begin{cases} \{tx \mid t \in T, x \in C\}, & \text{if } C \neq \emptyset, \\ \{0\}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

Let $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ be a proper convex function. We use the standard notations

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$$

and

$$\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \le r\}$$

for the domain and the epigraph of f, respectively. Note that since dom f is convex, so is $\overline{\operatorname{dom} f}$. Recall (cf. [44, p. 80]) that the subdifferential of f at $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ is the set

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \le f(x) - f(\bar{x}),\ \forall x \in X\}.$$

If $f(\bar{x}) = +\infty$ then we put $\partial f(\bar{x}) := \emptyset$. For a nonempty convex set $C \subset X$, the normal cone of C at $\bar{x} \in C$ is denoted by $N_C(\bar{x})$ and given (cf. [44, p. 87]) by

$$N_C(\bar{x}) := \partial\delta_C(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq 0, \forall x \in C\}, \tag{2}$$

where $\delta_C(\cdot)$ stands for the indicator function of C defined by $\delta_C(x) := 0$ for $x \in C$ and by $\delta_C(x) = +\infty$ otherwise. The singular subdifferential of f at $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ is defined (cf. [22, 33]) by

$$\partial^\infty f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, 0) \in N_{\operatorname{epi} f}(\bar{x}, f(\bar{x}))\}.$$

If $f(\bar{x}) = +\infty$ we consider $\partial^\infty f(\bar{x}) = \emptyset$. It is easy to verify that

$$\partial^\infty f(\bar{x}) = N_{\operatorname{dom} f}(\bar{x}). \tag{3}$$

Observe that the above definitions of the normal cone, subdifferential and singular subdifferential do not require any closedness and lower semicontinuous assumptions on the sets and functions.

In the following lemma, we will express $\partial f(\bar{x})$ in terms of $\partial f(\bar{x})$ and $\partial^\infty f(\bar{x})$.

Lemma 2.1 *For $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, we have*

$$\partial f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \partial^\infty f(\bar{x}). \tag{4}$$

Proof Note that the formula (4) is well known (see, e.g., [22, p. 310]). For the sake of readability, we hereby introduce a proof in detail.

If $\partial f(\bar{x}) = \emptyset$ then $\partial f(\bar{x}) + \partial^\infty f(\bar{x}) = \emptyset$, and hence the conclusion of the lemma is obvious. Otherwise, we first have that the set on the right-hand side of (4) contains the set on the left-hand side. For the converse, let any $x^* \in \partial f(\bar{x})$ any $y^* \in \partial^\infty f(\bar{x})$. Then, for every $x \in \operatorname{dom} f$ we have

$$\langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq f(x) - f(\bar{x})$$

and

$$\langle y^*, x - \bar{x}\rangle + 0(f(x) - f(\bar{x})) \leq 0.$$

By summing these inequalities side by side, we obtain

$$\langle x^* + y^*, x - \bar{x}\rangle \leq f(x) - f(\bar{x}),$$

which implies that $x^* + y^* \in \partial f(\bar{x})$. The proof is complete. □

Let $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ and $h \in X$. The directional derivative of f at $\bar{x}$ in the direction h is defined by

$$f'(\bar{x}, h) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})}{t}$$

when this limit exists. It is possible that $f'(\bar{x}, \cdot)$ take the value $-\infty$.

The distance function associated with $C \subset X$ is given by

$$d(x, C) := \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\} \text{ for } x \in X$$

with the convention that $d(x, C) := +\infty$ whenever $C = \emptyset$. When C is a nonempty convex set, the subdifferential of the distance function $d(\cdot, C)$ at every point in C is computed by (cf. [44, Proposition 3.8.3])

$$\partial d(x, C) = N_C(x) \cap \mathbb{B}^* \text{ for every } x \in C. \tag{5}$$

Moreover, the subdifferential of a distance function also has the following important properties (see, e.g., Ngai and Théra [36, Lemma 1]).

Lemma 2.2 *Suppose that C is a closed nonempty convex subset of X and that $x^* \in \partial d(x, C)$ for $x \notin C$. Then $\|x^*\| = 1$ and there exist a minimizing sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C of $d(x, C)$ (i.e., $d(x, C) = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\|$) and $y_n^* \in N_C(y_n)$ such that*

$$d(x, C) = \lim_{n\to\infty} \langle y_n^*, x - y_n\rangle \text{ and } \|y_n^* - x^*\| \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Combining (5) and Lemma 2.2 we have the following result that will be used in the next section to prove a sufficient condition for the existence of a global error bound.

Lemma 2.3 *Let $x \in X$. Suppose that C is a closed nonempty convex subset of X. Then there exist a minimizing sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C for x and $y_n^* \in N_C(y_n)$ such that*

$$d(x, C) = \lim_{n\to\infty} \langle y_n^*, x - y_n\rangle \text{ and } \limsup_{n\to\infty} \|y_n^*\| \le 1.$$

3 Global Error Bounds for a Convex Inequality

In this section, we give some necessary and sufficient conditions for the existence of global error bounds for a convex inequality. To make sure the role of our study, we also provide several examples to illustrate and explain the advantages of obtained results with existing ones in the literature.

Let $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a convex function. Consider the inequality

$$f(x) \le 0. \tag{6}$$

Denote by S the solution set of (6), that is,

$$S := \{x \in X \mid f(x) \le 0\}.$$

Definition 3.1 The inequality (6) is said to have a global error bound if there exists a real number $\tau > 0$ such that

$$d(x, S) \leq \tau f_+(x) \text{ for all } x \in X, \tag{7}$$

where $f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$.

We assume throughout that the solution sets are nonempty and not equal to the entire space X. Note that bd $S \neq \emptyset$ due to $S \neq X$. Further, since f isn't assumed lower semicontinuous, the value of this function can be negative, positive or infinity at a point in bd S and the solution S may not be closed, as will be seen in examples below.

Before we prove the first result of this section, we need the following lemma, where the part (i) is from [22, Lemma 2.6] and the part (ii) is due to [44, Example 2.8.1].

Lemma 3.1 *For $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, we have:*

(i) *If $f(\bar{x}) = 0$ then $\partial f_+(\bar{x}) = [0, 1]\partial f(\bar{x}) + \partial^\infty f(\bar{x})$.*
(ii) *If $f(\bar{x}) < 0$ then $\partial f_+(\bar{x}) = \partial \delta_{\operatorname{dom} f}(\bar{x})$.*

A necessary condition for the existence of a global error bound for the convex inequality (6) is stated as follow.

Proposition 3.1 *If the inequality (6) has a global error bound then there exists $\tau > 0$ such that for all $y \in$ bd $S \cap S$, the following condition holds*

$$N_S(y) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0, \tau]\partial f(y) & \text{if } f(y) = 0 \textit{ and } \partial f(y) \neq \emptyset, \\ \partial^\infty f(y) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{8}$$

Proof Suppose that the inequality (6) has a global error bound, i.e., there exists a real number $\tau > 0$ such that

$$d(x, S) \leq \tau f_+(x) \text{ for all } x \in X. \tag{9}$$

For any fixed $y \in$ bd $S \cap S$ (if this intersection is empty there is nothing to prove), we will show that (8) holds for this τ. Indeed, by (5), one has $N_S(y) \cap \mathbb{S}^* \subset \partial d(y, S)$. This means that for fixed $x^* \in N_S(y) \cap \mathbb{S}^*$, the following inequality is satisfied

$$\langle x^*, x - y \rangle \leq d(x, S) - d(y, S), \quad \forall x \in X.$$

Since $d(y, S) = f_+(y) = 0$ we deduce from (9) that

$$\langle x^*, x - y \rangle \leq \tau(f_+(x) - f_+(y)), \quad \forall x \in X.$$

Thus, $x^* \in \tau\partial f_+(y)$. Three cases are possible: (a) $f(y) = 0$ and $\partial f(y) \neq \emptyset$; (b) $f(y) = 0$ and $\partial f(y) = \emptyset$; and (c) $f(y) < 0$. In cases (a) and (b), since $f(y) = 0$ it follows from Lemma 3.1 (i) that

$$\begin{aligned} \tau\partial f_+(y) &= [0, \tau]\partial f(y) + \tau\partial^\infty f(y) \\ &= [0, \tau]\partial f(y) + \partial^\infty f(y), \end{aligned}$$

where the last equality is valid because $\partial^\infty f(y)$ is a cone. If $\partial f(y) \neq \emptyset$ then we get from (4) that $x^* \in [0, \tau]\partial f(y)$, and therefore $x^* \in (0, \tau]\partial f(y)$ since $x^* \neq 0$; while if $\partial f(y) = \emptyset$, we have by (1) that $x^* \in \partial^\infty f(y)$. In case (c), it follows from Lemma 3.1 (ii) that $\partial f_+(y) = \partial \delta_{\mathrm{dom}\, f}(y)$, and hence

$$\tau \partial f_+(y) = N_{\mathrm{dom}\, f}(y) = \partial^\infty f(y),$$

where the first equality follows directly from (2) and the other follows from (3). So (8) has been proved.

□

Since the set bd $S \cap S$ is possible empty, the necessary condition (8) is not sufficient. However, in the case when this intersection is nonempty, we don't know the answer as to whether or not the necessary condition (8) is sufficient. Of course, a necessary and sufficient condition (i.e., a full characterization) is clearly the weakest sufficient condition.

Next we provide a sufficient criterion for global error bounds of the inequality (6), which is somewhat different from (8).

Theorem 3.1 *Consider the inequality* (6)*. Assume that there exists* $\tau > 0$ *such that for all* $y \in \mathrm{bd}\, S$*, the following condition is fulfilled*

$$N_{\overline{S}}(y) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0, \tau]\partial f(y) & \text{if} 0 \leq f(y) < +\infty \text{ and } \partial f(y) \neq \emptyset, \\ \partial \delta_{\overline{\mathrm{dom}\, f}}(y) & \text{if } f(y) = +\infty, \\ \partial^\infty f(y) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{10}$$

Then the inequality (6) *has a global error bound.*

Proof It is well-known that $d(x, S) = d(x, \overline{S})$ for all $x \in X$. Therefore, it suffices to show that

$$d(x, \overline{S}) \leq \tau f_+(x) \text{ for every } x \in X.$$

Indeed, for any fixed $x \in X$, according to Lemma 2.3, there exist a minimizing sequence $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{S}$ for x and $y_n^* \in N_{\overline{S}}(y_n)$ such that

$$d(x, \overline{S}) = \lim_{n \to \infty} \langle y_n^*, x - y_n \rangle \text{ and } \limsup_{n \to \infty} \|y_n^*\| \leq 1. \tag{11}$$

Clearly, if $y_n^* = 0$ then

$$\langle y_n^*, x - y_n \rangle = 0 \leq \tau f_+(x). \tag{12}$$

Otherwise, one has $\|y_n^*\| \neq 0$, and hence

$$\frac{y_n^*}{\|y_n^*\|} \in N_{\overline{S}}(y_n) \cap \mathbb{S}^*. \tag{13}$$

Note that $\overline{S} = \text{int}S \cup \text{bd } S$ and if $y_n \in \text{int } S$ then $N_{\overline{S}}(y_n) = \{0\}$. Thus, it follows directly from (13) that $y_n \in \text{bd } S$. Now we distinguish four possible cases: (a) $0 \leq f(y_n) < +\infty$ and $\partial f(y_n) \neq \emptyset$; (b) $f(y_n) = +\infty$; (c) $0 \leq f(y_n) < +\infty$ and $\partial f(y_n) = \emptyset$; and (d) $f(y_n) < 0$. In the first case, the relations (10) and (13) tell us that there exists $\ell \in (0, \tau]$ such that

$$\left\langle \frac{y_n^*}{\|y_n^*\|}, x - y_n \right\rangle \leq \ell(f(x) - f(y_n)) \leq \ell f(x) \leq \tau f_+(x). \tag{14}$$

In the case (b), we also get from (10) and (13) that

$$\left\langle \frac{y_n^*}{\|y_n^*\|}, x - y_n \right\rangle \leq 0 \leq \tau f_+(x). \tag{15}$$

For the case of (c), let $g(z) := \max\{f(z) - f(y_n), 0\}$ for all $z \in X$. We observe first that y_n is a minimum point of the convex function g, which implies $0 \in \partial g(y_n)$. Thus, we have by (4) an inclusion

$$\partial^\infty g(y_n) \subseteq \partial g(y_n).$$

On the other hand, since dom $f =$ dom g we obtain from (3) that

$$\partial^\infty f(y_n) = \partial^\infty g(y_n),$$

and therefore

$$\partial^\infty f(y_n) = \tau \partial^\infty f(y_n) \subseteq \tau \partial g(y_n).$$

Again, by (10) and (13), one has $\frac{y_n^*}{\|y_n^*\|} \in \tau \partial g(y_n)$, which yields

$$\begin{aligned} \left\langle \tfrac{y_n^*}{\|y_n^*\|}, x - y_n \right\rangle &\leq \tau(g(x) - g(y_n)) \\ &= \tau\big(\max\{f(x) - f(y_n), 0\} - \max\{f(y_n) - f(y_n), 0\}\big) \\ &\leq \tau f_+(x). \end{aligned} \tag{16}$$

In the last case, we repeat the argument as in (c) with g replaced by f_+. Then we also have

$$\left\langle \frac{y_n^*}{\|y_n^*\|}, x - y_n \right\rangle \leq \tau(f_+(x) - f_+(y_n)) = \tau f_+(x).$$

Combining this with (12), (14), (15), (16) and (11) we get

$$d(x, \overline{S}) = \lim_{n\to\infty} \langle y_n^*, x - y_n \rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \|y_n^*\| \tau f_+(x) \leq \tau f_+(x).$$

The proof is complete. ◻

Remark 3.1 It should be emphasized that Theorem 3.1 may not be necessary, in general, for the existence of a global error bound for a convex inequality, as will be demonstrated by Example 3.3 below.

Remark 3.2 Observe that in many contributions to the theory of global/local error bounds for convex functions, the lower semicontinuity assumption or several conditions on the solution set, such as the closedness, the boundedness, etc., have been imposed. When both f and f_+ are not lower semicontinuous and the solution set is non-closed and unboundedness as in the following examples, we can use Proposition 3.1 and Theorem 3.1 to determine the nonexistence or existence of a global error bound.

Example 3.1 Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be defined by

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} x_1^2 + 3x_1 + e^{-x_3} - 1 & \text{if } (x_1, x_2, x_3) \in (0, 1] \times [-1, 2] \times [-1, 0], \\ 0 & \text{if } (x_1, x_2, x_3) \in \{0\} \times (-1, 0] \times \{0\}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By setting

$$C := (0, 1] \times [-1, 2] \times [-1, 0] \cup \{0\} \times (-1, 0] \times \{0\},$$

we can rewrite the function f as

$$f(x_1, x_2, x_3) = \delta_C(x_1, x_2, x_3) + x_1^2 + 3x_1 + e^{-x_3} - 1 \text{ for } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

where δ_C is the indicator function of C. Then, we have that dom $f = C$ and

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) \le 0\} = \{0\} \times (-1, 0] \times \{0\}.$$

Observe that, as f is proper convex, then so is f_+. But both f and f_+ are not lower semicontinuous and since S is not closed, many existing results do not work. Also note that $(0, -1, 0) \in$ bd S and $f(0, -1, 0) = +\infty$.

Now for $\bar{x} = (0, 0, 0) \in$ bd $S \cap S$, we can directly calculate that $f(\bar{x}) = 0$,

$$\begin{aligned} N_S(\bar{x}) &= \left\{x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x^*, y - \bar{x}\rangle \le 0, \ \forall y \in \{0\} \times (-1, 0] \times \{0\}\right\} \\ &= \mathbb{R} \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ N_C(\bar{x}) &= \left\{x^* \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x^*, y - \bar{x}\rangle \le 0, \ \forall y \in C\right\} = (-\infty, 0] \times \{0\} \times [0, +\infty) \end{aligned}$$

and

$$\partial f(\bar{x}) = N_C(\bar{x}) + (3, 0, -1) = (-\infty, 3] \times \{0\} \times [-1, +\infty).$$

Clearly $(0, 1, 0) \in N_S(\bar{x}) \cap \mathbb{S}^*$, but for any $\tau > 0$ one has

$$(0, 1, 0) \notin (-\infty, 3\tau] \times \{0\} \times [-\tau, +\infty) = (0, \tau]\partial f(\bar{x}).$$

This means that the relation (8) does not hold at $\bar{x}$. Applying now Proposition 3.1, we conclude that the inequality $f(x_1, x_2, x_3) \le 0$ does not admit a global error bound.

Example 3.2 Let $X = l^2$, the space of square-summable sequences of real numbers, and let $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be given by

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x^i & \text{if } x^i < 0,\ \forall i \in \mathbb{N} \text{ and } x^i \ne 0 \text{ for at most finitely many } i, \\ 1 & \text{if } x = (0, \ldots), \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where x^i denotes the i th coordinate of x. Then we get that f is a convex function and

$$S = \{(x^1, \ldots, x^i, \ldots) \in X \mid x^i < 0,\ \forall i \in \mathbb{N} \text{ and } x^i \ne 0 \text{ for finitely many } i\}.$$

It is interesting to note that the solution set S is non-closed and unbounded and, f and f_+ are not lower semicontinuous. Moreover, it may not be easy to find $\overline{f}$, where $\overline{f}$ is the lower semicontinuous regularization of f given by $\overline{f}(x) := \liminf_{y \to x} f(y)$ for $x \in X$.

To try with Theorem 3.1, we first observe that

$$\operatorname{dom} f = S \cup \{\bar{x}\}, \tag{17}$$

where $\bar{x} := (0, 0 \ldots)$. In addition, one has $x_n := (-\frac{1}{2^n}, 0, \ldots) \in S$ for each natural number, and $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$. This together with (17) implies that

$$\bar{x} \in \overline{S} = \overline{\operatorname{dom} f}. \tag{18}$$

Now let y be an arbitrary element of $\operatorname{bd} S$. We consider two possible cases: (a) $f(y) = +\infty$ and (b) $y \in \operatorname{dom} f = S \cup \{\bar{x}\}$. For case (a), we get from (18) that

$$N_{\overline{S}}(y) = N_{\overline{\operatorname{dom} f}}(y) = \partial \delta_{\overline{\operatorname{dom} f}}(y),$$

and hence the condition (10) is fulfilled. For case (b), we first note that if $y \in S$ then $f(y) < 0$. Next we claim that $\partial f(\bar{x}) = \emptyset$. Indeed, if $x^* \in \partial f(\bar{x})$ then (cf. [44])

$$\langle x^*, h \rangle \le f'(\bar{x}, h) \text{ for all } h \in X.$$

Let e_1 denote the 1-th unit vector in ℓ^2. Then we have

$$-\|x^*\| \le \langle x^*, -e_1 \rangle \le f'(\bar{x}, -e_1) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{x} - te_1) - f(\bar{x})}{t} = -\infty,$$

an impossibility. Thus, the condition (10) also holds in this case since

$$N_{\overline{S}}(y) = N_{\overline{\operatorname{dom} f}}(y) \subset N_{\operatorname{dom} f}(y) = \partial^{\infty} f(y).$$

According to Theorem 3.1, the inequality $f(x) \le 0$ admits a global error bound.

Under the assumption that S is closed, the existence of global error bounds for the convex inequality (6) can be characterized by the normal cone and subdifferentials as follows.

Corollary 3.1 *For the inequality* (6)*, assume that S is closed. Then the inequality* (6) *has a global error bound if and only if there exists $\tau > 0$ such that for all $x \in \operatorname{bd} S$, the following condition holds*

$$N_S(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0, \tau]\partial f(x) & \text{if } f(x) = 0 \textit{ and } \partial f(x) \neq \emptyset, \\ \partial^\infty f(x) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{19}$$

Proof Since S is closed, one has $\operatorname{bd} S \cap S = \operatorname{bd} S$ and further that $f(y) \leq 0$ for all $y \in \operatorname{bd} S$. Thus, both relations (8) and (10) become (19). Now the conclusions follow directly from Proposition 3.1 and Theorem 3.1. $\square$

Remark 3.3 Corollary 3.1 is equivalent to Theorem 3.2 in [22], a characterization of global error bounds in terms of the so-called weak basic constraint qualification and “end set" of subdifferentials.

In practice, it may not be easy to verify the above necessary and sufficient conditions. Next we study special cases in finite dimensional spaces, which are often simpler to check the existence or nonexistence of global error bounds.

Theorem 3.2 *For the inequality* (6)*, assume that $X = \mathbb{R}^n$. Assume further that S is compact and* $\operatorname{bd} S \subseteq f^{-1}(0)$. *Then the inequality* (6) *has a global error bound if and only if there exists $\tau > 0$ such that for all $x^e \in \operatorname{ext} S$ the following condition holds*

$$N_S(x^e) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0, \tau]\partial f(x^e) & \text{if} \, \partial f(x^e) \neq \emptyset, \\ \partial^\infty f(x^e) & \text{if} \, \partial f(x^e) = \emptyset. \end{cases} \tag{20}$$

Proof By Corollary 3.1, it is sufficient to show that if the relation (20) holds on $\operatorname{ext} S$ then for all $x \in \operatorname{bd} S$,

$$N_S(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0, \tau]\partial f(x) & \text{if} \, \partial f(x) \neq \emptyset, \\ \partial^\infty f(x) & \text{if} \, \partial f(x) = \emptyset. \end{cases} \tag{21}$$

Indeed, let $x \in \operatorname{bd} S$ be an arbitrary element. By Minkowski theorem (see, e.g., [5]), $x \in \operatorname{co}(\operatorname{ext} S)$. Then the Carathéodory theorem (cf. [44]) tells us that there exist $x_1^e, x_2^e \ldots, x_{n+1}^e \in \operatorname{ext} S$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \in [0, 1]$ such that

$$x = \Big(1 - \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i\Big) x_1^e + \alpha_2 x_2^e + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}^e.$$

Clearly if $\alpha := \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i = 0$ then the relation (21) holds at x, we are done. Otherwise, we set

$$u := \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2^e + \cdots + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha} x_{n+1}^e$$

and

$$v := x - x_1^e = -\alpha x_1^e + \alpha u. \tag{22}$$

Then it is easy see that

$$x = (1-\alpha)x_1^e + \alpha u. \tag{23}$$

For any $x^* \in N_S(x)$, we have $\langle x^*, -v\rangle = \langle x^*, x_1^e - x\rangle \leq 0$, or equivalently, $\langle x^*, v\rangle \geq 0$. Further, since $u \in S$ we also have

$$\begin{aligned}
\langle x^*, u - x\rangle &= \langle x^*, u - (1-\alpha)x_1^e - \alpha u\rangle \quad (\text{by}(23)) \\
&= \langle x^*, (1-\alpha)(u - x_1^e)\rangle \\
&= \left\langle x^*, \frac{(1-\alpha)}{\alpha}(-\alpha x_1^e + \alpha u)\right\rangle \\
&= \langle x^*, (\frac{1}{\alpha} - 1)v\rangle \leq 0 \quad (\text{by } (22)),
\end{aligned}$$

which implies that $\langle x^*, v\rangle \leq 0$. Thus,

$$\langle x^*, v\rangle = 0. \tag{24}$$

It follows that for all $s \in S$,

$$\begin{aligned}
\langle x^*, s - x_1^e\rangle &= \langle x^*, s - (x - v)\rangle \ (\text{by } 22) \\
&= \langle x^*, s - x\rangle + \langle x^*, v\rangle \\
&= \langle x^*, s - x\rangle \leq 0,
\end{aligned}$$

i.e., $x^* \in N_S(x_1^e)$. Thus one has

$$N_S(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq N_S(x) \cap N_S(x_1^e) \cap \mathbb{S}^*. \tag{25}$$

Now we discuss two cases: $\partial f(x_1^e) \neq \emptyset$ and $\partial f(x_1^e) = \emptyset$. In the first case of $\partial f(x_1^e) \neq \emptyset$, for any fixed $x^* \in N_S(x) \cap \partial f(x_1^e)$ and v as in (22) we have that for every $y \in X$,

$$\begin{aligned}
\left\langle x^*, y - x\right\rangle &= \left\langle x^*, y - x\right\rangle + \left\langle x^*, v\right\rangle \ (\text{by } 24) \\
&= \left\langle x^*, y - (x - v)\right\rangle \\
&= \left\langle x^*, y - x_1^e\right\rangle \ (\text{by } 22) \\
&\leq f(y) - f(x_1^e) \\
&= f(y) - f(x),
\end{aligned}$$

where $f(x) = f(x_1^e) = 0$ by virtue of $x, x_1^e \in \operatorname{bd} S \subseteq f^{-1}(0)$. It follows that $x^* \in \partial f(x)$, and therefore

$$N_S(x) \cap \partial f(x_1^e) \subseteq \partial f(x). \tag{26}$$

In the second case of $\partial f(x_1^e) = \emptyset$, for fixed $x^* \in N_S(x) \cap N_{\mathrm{dom}\, f}(x_1^e)$ and v as in (22) we also have by (24) and (22) that

$$\langle x^*, y - x \rangle = \langle x^*, y - x_1^e \rangle \leq 0 \text{ for all } y \in \mathrm{dom}\, f,$$

i.e., $x^* \in N_{\mathrm{dom}\, f}(x)$. Consequently,

$$N_S(x) \cap \partial^\infty f(x_1^e) = N_S(x) \cap N_{\mathrm{dom}\, f}(x_1^e) \subseteq N_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \partial^\infty f(x).$$

Combining this with (20), (25) and (26) completes the proof. □

The interested reader is referred to [22] for some results on the global error bounds of a convex function under more general conditions related to the weak basic constraint qualification and end set of subdifferentials and the segment extension property.

In several cases, the set of extreme points may be smaller than the set of boundary points. The following example illustrates the advantage of Theorem 3.2 over several known results from the literature. Moreover, it shows as well that the condition (10) in Theorem 3.1 is not necessary.

Example 3.3 Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be given by

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \max\{e^{-x_1} - 1, |x_2|\} & \text{if } (x_1, x_2) \in (-\infty, 2] \times \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Observe that f can be represented as follows:

$$f(x_1, x_2) = \delta_C(x_1, x_2) + \max\{g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)\},$$

where $C := (-\infty, 2] \times \mathbb{R}$, $g_1(x_1, x_2) := e^{-x_1} - 1$ and $g_2(x_1, x_2) := |x_2|$ for $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. It can be checked that

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\, f &= (-\infty, 2] \times \mathbb{R}, \\ S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) \leq 0\} &= [0, 2] \times \{0\}. \end{aligned}$$

In order to show the existence of a global error bound for the inequality $f(x) \leq 0$, we can use either Theorem 1 in [28] or Theorem 3.4 in [34] or Proposition 2.1 in [46] by verifying conditions in these theorems holding for all $x \in f^{-1}(0) = [0, 2] \times \{0\}$ (or bd S). However, since S is compact and bd $S = f^{-1}(0)$, by using our Theorem 3.2, we only need to check the fulfillment of (20) at two extreme points $\{(0, 0), (2, 0)\}$. In fact, we can directly calculate that $f(0, 0) = \max\{0, 0\} = 0$,

$$\begin{aligned} \partial f(0, 0) &= N_C(0, 0) + \mathrm{co}\, \{\partial g_1(0, 0), \partial g_2(0, 0)\} \\ &= (0, 0) + \mathrm{co}\, \{(-1, 0), \{0\} \times [-1, 1]\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 0, \quad -x_1 - 1 \leq x_2 \leq x_1 + 1\} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N_S(0,0) &= \left\{(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x_1^*, x_2^*), (x_1, x_2)\rangle \leq 0,\ \forall (x_1, x_2) \in [0,2] \times \{0\}\right\} \\ &= (-\infty, 0] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Then take any $\tau \geq \sqrt{2}$ to get

$$N_S(0,0) \cap \mathbb{S}^* \subseteq (0, \tau]\partial f(0,0). \tag{27}$$

We also have $f(2,0) = \max\{e^{-1} - 1, 0\} = 0$,

$$\begin{aligned} \partial f(2,0) &= N_C(2,0) + \{\partial g_2(0,0)\} \\ &= [0, +\infty) \times \{0\} + [0, +\infty) \times [-1, 1] \\ &= [0, +\infty) \times [-1, 1]. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N_S(2,0) &= \left\{(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x_1^*, x_2^*), (x_1 - 2, x_2)\rangle \leq 0,\ \forall (x_1, x_2) \in [0,2] \times \{0\}\right\} \\ &= [0, +\infty) \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

and thus yields an inclusion

$$N_S(2,0) \cap \mathbb{S}^* \subset \partial f(2,0).$$

This together with (27) implies that the relation (20) holds for all $x \in \operatorname{ext} S$. According to Theorem 3.2, the inequality $f(x) \leq 0$ has a global error bound, i.e., there exists $\tau > 0$ such that

$$d(x, S) \leq \tau f_+(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{28}$$

Next let $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be given by

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_1) & \text{if } (x_1, x_2) \in (-\infty, 2) \times \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then we have

$$S_g := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) \leq 0\} = [0, 2) \times \{0\}.$$

By (28) and the definition of g, one has

$$d(x, S_g) = d(x, S) \leq \tau f_+(x) \leq \tau g_+(x) \text{ for each } x \in \mathbb{R}^2,$$

that is, the inequality $g(x) \leq 0$ has a global error bound. However, for $(2,0) \in \overline{S_g}$ we have that $g(2,0) = +\infty$,

$$N_{\overline{\operatorname{dom} g}}(2,0) = \left\{(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x_1^*, x_2^*), (x_1 - 2, x_2)\rangle \leq 0,\ \forall (x_1, x_2) \in (-\infty, 2] \times \mathbb{R}\right\}$$

$$= [0, +\infty) \times \{0\}$$

and

$$N_{\overline{S_g}}(2, 0) = N_S(2, 0) = [0, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

Therefore,

$$N_{\overline{S_g}}(2, 0) \cap \mathbb{S}^* \not\subseteq N_{\overline{\mathrm{dom} g}}(2, 0) = \partial\delta_{\overline{\mathrm{dom} g}}(2, 0).$$

This means that the condition (10) in Theorem 3.1 is sufficient for the existence of global error bounds for a convex inequality but not necessary.

Corollary 3.2 *For the inequality (6), assume that $X = \mathbb{R}^n$, f is continuous and S is compact. Then the inequality (6) has a global error bound if and only if there exists $\tau > 0$ such that for all $x^e \in \mathrm{ext}\, S$, the following condition holds*

$$N_S(x^e) \cap \mathbb{S}^* \subseteq (0, \tau]\partial f(x^e). \tag{29}$$

Proof Since $f(x) = 0$ and $\partial f(x) \neq \emptyset$ for all $x \in \mathrm{bd}\, S$, the conclusions follow from Theorem 3.2. □

Observe that when the solution set S is compact and f is continuous, then we often use the Slater condition to determine the existence of a global error bound because it is a simple sufficient condition. But, this condition may not hold in some situations while Corollary 3.2 can be applied. We end this section with an example illustrating such a situation.

Example 3.4 Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \max\{g_1(x), g_2(x), 0\},$$

where $g_1(x) = -10x - 10$ and $g_2(x) = 2x^2 + \sqrt{x^2 + 1} - 2 - \sqrt{2}$ for $x \in \mathbb{R}$. We see that f is convex continuous,

$$S := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\} = [-1, 1] \text{ and } \mathrm{ext}\, S = \{-1, 1\}.$$

Observe that since the Slater condition (there exists $\bar{x} \in \mathbb{R}$ such that $f(\bar{x}) < 0$) is not satisfied, Corollary 2 in [28], Proposition 3.1 in [30], and Corollary 3.5 in [34] are out of use.

On the other hand, we have $N_S(1) = [0, +\infty)$ and

$$\partial f(1) = \mathrm{co}\,\{0, \partial g_2(1)\} = \mathrm{co}\,\left\{0, 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \left[0, 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

and therefore for $\tau = 1$,

$$N_S(1) \cap \mathbb{S}^* = \{1\} \subset \left[0, 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = (0, 1]\partial f(1).$$

We also have $N_S(1) = (-\infty, 0]$ and

$$\partial f(-1) = \text{co}\,\{\partial g_1(-1), g_2(-1), 0\} = \text{co}\left\{-10, -4 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\} = [-10, 0],$$

and further that for $\tau = 1$,

$$N_S(-1) \cap \mathbb{S}^* = \{-1\} \subset [-10, 0] = (0, 1]\partial f(-1).$$

Then, by Corollary 3.2, the inequality $f(x) \leq 0$ has a global error bound.

4 A Necessary and Sufficient Condition for the PLV Property and Application

In this section, we provide a rule to calculate the subdifferential set of the pointwise supremum of convex continuous functions defined on a Banach space. This result together with the results of the preceding section is applied to investigating the existence of global error bounds for infinite systems of linear and convex inequalities.

Let $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in I$, be a family of proper convex functions, where I is an arbitrary index set (not necessarily finite). For each $x \in X$, we define $F(x) := \sup_{i \in I}\{f_i(x)\}$ and the set of active indices at x is

$$I(x) := \{i \in I \mid f_i(x) = F(x)\}. \tag{30}$$

We always assume that the sup-function $F(x) < +\infty$ for all $x \in X$.

Definition 4.1 The family $\{f_i\}_{i \in I}$ is said to have the Pshenichnyi-Levin-Valadier (PLV in short) property at $x \in \text{dom}F$, if

$$\partial F(x) = \text{co}\Big(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x)\Big) \tag{31}$$

(under the convention that $\bigcup_{i \in \emptyset} \partial f_i(x) = \emptyset$).

Remark 4.1 (i) This definition was introduced and studied for the particular case where X is a finite dimentional space in [32] and investigated to locally convex Hausdorff topological vector spaces in [29]. When I is finite and each f_i is continuous, [27] provided the sufficient condition for (31) in finite dimentional spaces. At the same time, [41] also obtained the weaker conclusion in which the right-hand side of (31) is replaced by the closed hull itself in topological linear spaces. Further details (PLV theorem [27, 38, 41]) can be found in [32].

(ii) It is known that, in general, (31) does not hold when I is infinite. On the other hand, for each $x \in \text{dom}\ F$ we always have

$$\partial F(x) \supseteq \text{co}\Big(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x)\Big).$$

Hence the family $\{f_i\}_{i\in I}$ has the PLV property at $x \in$ dom F if and only if

$$\partial F(x) \subseteq \mathrm{co}\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big).$$

To study the PLV property, we need the following definition.

Definition 4.2 Let $D : X \rightrightarrows X^*$ be a set-valued mapping and $x \in X$. Then D is said to be upper Kuratowski semicontinuous (uKsc, in short) at x if the relations $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to x$, $x^*_\lambda \in D(x_\lambda)$ and $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{w^*} x^*$ imply $x^* \in D(x)$, where $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to x$ (resp., $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{w^*} x^*$) means that the net $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converges to x with respect to the norm topology of X (resp., $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converges to x^* with respect to the weak* topology of X^*). We say that D is uKsc if it is uKsc everywhere in its domain.

The above notion of upper Kuratowski semicontinuity was considered for the special case of $X = \mathbb{R}^n$ and used to investigate the PLV property in [32].

Next we recall (cf. [44, p. 286]) that a set-valued $T : X \rightrightarrows X^*$ is called locally bounded at $\bar{x} \in X$ if there exists $r > 0$ such that $T(\mathbb{B}(\bar{x}, r)))$ is a bounded set. Before deriving the main result of this section, let us present two useful results.

Lemma 4.1 *Let $g : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ be a convex lower semicontinuous and $\bar{x} \in \overline{\mathrm{dom} g}$ and let $(x_\lambda, x^*_\lambda) \in \mathrm{gph}\partial g$ for every $\lambda \in \Lambda$. Then:*

(i) [44, Corollary 3.11.16 (i)] *∂g is locally bounded at $\bar{x}$ if and only if $\bar{x} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} g)$.*

(ii) [44, Theorem 2.4.2 (ix)] *If $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to \bar{x}$, $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{w^*} \bar{x}^*$ and the net $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is norm-bounded then $(\bar{x}, \bar{x}^*) \in \mathrm{gph}\partial g$.*

Observe that Lemma 4.1 (ii) is a sufficient condition for the upper Kuratowski semicontinuity of ∂g. Interested readers can find related discussions in [4].

Now we are ready to present a necessary and sufficient condition for the PLV property as follows.

Theorem 4.1 *Let f_i be convex continuous for every $i \in I$ and let $\bar{x} \in X$. Let*

$$D(x) := \mathrm{co}\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big) \textit{ for } x \in X.$$

Assume that $I(z)$ is non-empty for all z in a neighborhood of $\bar{x}$. Then, $\partial F(\bar{x}) = D(\bar{x})$ if and only if D is uKsc at $\bar{x}$.

Proof We observe first that there exists $r > 0$ such that $I(z) \neq \emptyset$ for all $z \in \mathbb{B}(\bar{x}, r)$. Furthermore, under the assumptions that f_i is finite and continuous at every $z \in \mathbb{B}(\bar{x}, r)$, we can apply [44, Theorem 2.4.9] to get $\partial f_i(z) \neq \emptyset$ for every $i \in I(z)$. Therefore, one has $D(z) \neq \emptyset$.
[$\Longleftarrow$] Suppose that D is uKsc at $\bar{x}$. Since $D(\bar{x}) \subseteq \partial F(\bar{x})$ always holds, it remains to show that $\partial F(\bar{x}) \subseteq D(\bar{x})$. Assume to the contrary that $\hat{x}^* \in \partial F(\bar{x})\backslash D(\bar{x})$ exists. Clearly, $D(\bar{x})$ is convex. Furthermore, it follows from Definition 4.2 that $D(\bar{x})$ is

weak*−closed. Applying now Theorem 1.1.5 in [44] (the separation theorem of two convex sets), there is $h \in X\backslash\{0\}$ such that

$$\langle \hat{x}^*, h\rangle > \sup_{x^*\in D(\bar{x})} \langle x^*, h\rangle.$$

As $\hat{x}^* \in \partial F(\bar{x})$ and a well-known formula for $F'(\bar{x}, h)$, one has

$$F'(\bar{x}, h) \geq \sup_{x^*\in \partial F(\bar{x})} \langle x^*, h\rangle \geq \langle \hat{x}^*, h\rangle > \sup_{x^*\in D(\bar{x})} \langle x^*, h\rangle. \tag{32}$$

On the other hand, let $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to 0^+$. Without loss of generality, we can assume that for all $\lambda \in \Lambda$, $\bar{x} + t_\lambda h \in \mathbb{B}(\bar{x}, r)$, i.e., $I(\bar{x} + t_\lambda h) \neq \emptyset$. For any $i_\lambda \in I(\bar{x} + t_\lambda h)$ and $x^*_\lambda \in \partial f_{i_\lambda}(\bar{x} + t_\lambda h) \subseteq \partial F(\bar{x} + t_\lambda h)$, we have

$$-t_\lambda\langle x^*_\lambda, h\rangle = \langle x^*_\lambda, \bar{x} - (\bar{x} + t_\lambda h)\rangle \leq F(\bar{x}) - F(\bar{x} + t_\lambda h),$$

and therefore

$$\langle x^*_\lambda, h\rangle \geq \frac{F(\bar{x} + t_\lambda h) - F(\bar{x})}{t_\lambda} \text{ (because } t_\lambda > 0). \tag{33}$$

Since $I(z) \neq \emptyset$ for all $z \in \mathbb{B}(\bar{x}, r)$, we obtain that $\mathbb{B}(\bar{x}, r) \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$. This together with the lower semicontinuity of F implies that assumptions of Lemma 4.1 (i) are fulfilled. Employing this lemma, one has that ∂F is locally bounded at $\bar{x}$. Thus we can assume that $\partial F(\mathbb{B}(\bar{x}, r))$ is a bounded set, that is, there exists $R > 0$ such that $\partial F(\mathbb{B}(\bar{x}, r)) \subseteq \overline{\mathbb{B}^*}(0, R)$. By Alaoglu's theorem, $\overline{\mathbb{B}^*}(0, R)$ is compact in the weak* topology of X^*, and since

$$x^*_\lambda \in \partial F(\bar{x} + t_\lambda h) \subseteq \partial F(\mathbb{B}(\bar{x}, r)) \subseteq \overline{\mathbb{B}^*}(0, R),$$

without loss of generality, one can assume that $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{w^*} \bar{x}^*$. Now letting $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to 0^+$ in (33) and using (32), one gets

$$\langle \bar{x}^*, h\rangle \geq F'(\bar{x}, h) > \sup_{x^*\in D(\bar{x})} \langle x^*, h\rangle. \tag{34}$$

However, since $(\bar{x} + t_\lambda h)_{\lambda\in\Lambda} \to \bar{x}$, $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{w^*} \bar{x}^*$, $x^*_\lambda \in \partial f_{i_\lambda}(\bar{x} + t_\lambda h) \subseteq D(\bar{x} + t_\lambda h)$ and D is uKsc at $\bar{x}$, we obtain that $\bar{x}^* \in D(\bar{x})$, which contradicts (34). Therefore, one has

$$\partial F(\bar{x}) = D(\bar{x}).$$

[$\Longrightarrow$] Suppose that $\partial F(\bar{x}) = D(\bar{x})$. Let $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to \bar{x}$, $x^*_\lambda \in D(x_\lambda) \subseteq \partial F(x_\lambda)$ and $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{w^*} \bar{x}^*$. We claim that $\bar{x}^* \in D(\bar{x})$. Indeed, without loss of generality, one can assume that the net $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbb{B}(\bar{x}, r)$. As indicated above, $\partial F(\mathbb{B}(\bar{x}, r))$ is a bounded set, and hence the net $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is norm-bounded. This means that all assumptions of Lemma 4.1 (ii) are satisfied. According to this lemma, one has $(\bar{x}, \bar{x}^*) \in \text{ gph } \partial F$, and so $\bar{x}^* \in \partial F(\bar{x}) = D(\bar{x})$. Therefore, D is uKsc at $\bar{x}$. The proof is complete. □

Remark 4.2 Theorem 4.1 is an extension of Theorem 3.7 in [32] since $\mathbb{R}^n$ is a special case of general Banach spaces.

Now we apply Theorem 4.1 to study the theory of error bounds. Let f_i, $i \in I$, and F be as in the first paragraph of Sect. 4. Consider the convex inequalities system:

$$f_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I. \tag{35}$$

Definition 4.3 The system (35) is said to have a global error bound if there exists a real number $\tau > 0$ such that

$$d(x, S_F) \leq \tau F_+(x) \text{ for all } x \in X, \tag{36}$$

where $S_F := \{x \in X \mid f_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I\}$ and $F_+(x) := \max\{F(x), 0\}$. We also denote by $\tau_{\min}$ the infimum of all error bound constants τ satisfying (36).

The following proposition is a characterization of global error bounds for the system (35).

Proposition 4.1 *Let the family $\{f_i\}_{i\in I}$ and D be as in Theorem 4.1. Assume that for all $x \in \text{bd } S_F$, D is uKsc at x and $I(z) \neq \emptyset$ for all z in a neighborhood of x. Then, the system (35) has a global error bound if and only if there exists $\tau > 0$ such that for all $x \in \text{bd } S$, the following condition holds*

$$N_{S_F}(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq A := \begin{cases} (0, \tau]\text{co}\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big) & \text{if } F(x) = 0 \textit{ and } \partial F(x) \neq \emptyset, \\ \partial^\infty F(x) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{37}$$

Proof Since F is lower semicontinuous, the solution set S_F is closed. Moreover, by Theorem 4.1 we have

$$\partial F(x) = \text{co}\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big) \neq \emptyset, \ \forall x \in \text{ bd } S_F. \tag{38}$$

By setting $f := F$, the conclusions come now from Corollary 3.1. □

Next we apply the system (35) to a more simple situation. Consider an uncertain linear inequality system in the form:

$$x \in \mathbb{R}^n, \ a^\top x - b \leq 0, \tag{39}$$

where $a^\top$ represents the transpose of $a \in \mathbb{R}^n$ and $b \in \mathbb{R}$, which are uncertain data. Like the traditional approach used in Robust Optimization to treat data uncertainty, we assume that (a, b) belongs to the compact subset U of $\mathbb{R}^{n+1}$. Then the system

$$a^\top x - b \leq 0, \quad \forall (a, b) \in U, \tag{40}$$

is called the robust counterpart of the uncertain linear inequality system (39). We denote by S_R the solution set of the robust system (40), i.e.,

$$S_R := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x - b \leq 0, \quad \forall (a, b) \in U\}.$$

For each $x \in \mathbb{R}$, we set

$$f_R(x) := \max\{a^\top x - b \mid (a, b) \in U\}$$

and

$$U(x) = \{(a, b) \in U \mid a^\top x - b = f_R(x)\}.$$

The following definition was introduced and studied by [8, 9].

Definition 4.4 The uncertain linear inequality system (39) is said to have a robust global error bound if the system (40) has a global error bound, i.e., there exists $\tau > 0$ such that

$$d(x, S_R) \leq \tau \max\{f_R(x), 0\} \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 4.5 Let C be a convex closed subset of X. The end set of C is defined by

$$E[C] := \{z \in C \mid tz \notin C, \ \forall t > 1\}.$$

Observe that $0 \notin E[C]$. The above definition, without the closedness of C, was first proposed in [46] and has been further studied in some papers, e.g., [21, 22].

Lemma 4.2 *Let C be a convex closed subset of X. Suppose that there exist $k > 0$ and $x \in X$ such that $0 \neq kx \in C$. Then we have:*

(i) *If $M := \sup\{t \geq 0 \mid tx \in C\} < \infty$ then $Mx \in E[C]$.*
(ii) *If, in addition, C is bounded then $\emptyset \neq E[C] \subseteq \operatorname{bd} C$.*

Proof (i) The proof is similar to the proof of Lemma 2.2 in [21]. However, we prefer to give the details for the sake of readability. Since $0 \neq kx \in C$, the set $\{t \geq 0 \mid tx \in C\}$ is nonempty. If $M < \infty$, there exists an increasing sequence $\{t_n\}$ such that $\lim_{n\to\infty} t_n = M$, $t_n x \in C$ and

$$\lim_{n\to\infty} t_n x = Mx \in C.$$

Then by the definition of M, one has $tMx \notin C$ for all $t > 1$, which implies that $Mx \in E[C]$.

(ii) If C is bounded then $M := \sup\{t \geq 0 \mid tx \in C\} < \infty$. By (i), one has $Mx \in E[C]$, i.e., $E[C] \neq \emptyset$. Let $z \in E[C]$ be an arbitrary element. If $z \in \operatorname{int} C$, there exists $r > 0$ such that $\mathbb{B}(z, r) \subset C$. Note that $z \neq 0$. Since $\left\| \left(1 + \frac{r}{2\|z\|}\right) z - z \right\| = \frac{r}{2} < r$, we get $\left(1 + \frac{r}{2\|z\|}\right) z \in C$, which contradicts $z \in E[C]$. Hence we must have $E[C] \subset \operatorname{bd} C$. The proof is complete.

□

We are now ready to derive important special cases.

Corollary 4.1 *For the system (39), the following statements are equivalent:*

(i) *The system (39) has a robust global error bound.*
(ii) *There exists $\tau > 0$ such that for all $x \in \operatorname{bd} S_R$,*

$$N_{S_R}(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq (0, \tau]\operatorname{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\}. \tag{41}$$

(iii) *There exists $\tau > 0$ such that for all $x \in \operatorname{bd} S_R$, the following conditions hold:*

(iii_1) *$N_{S_R}(x) = [0, +\infty)\operatorname{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\}$;*
(iii_2) *$d\,(0, E\,[\partial f_R(x)]) \geq \frac{1}{\tau}$.*

Proof We will prove the equivalence of the above three statements following the diagram: (i) ⇔ (ii) ⇔ (iii).

(i) ⇔ (ii). For each $(a, b) \in U$, we set

$$i := (a, b) \text{ and } f_i(x) := a^\top x - b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

First we show that for all $x \in \mathbb{R}^n$, $U(x) \neq \emptyset$ and the function $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ given by $D(x) := \operatorname{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\}$ is upper Kuratowski semicontinuous. Indeed, since U is compact, $U(x) \neq \emptyset$. Moreover, we get from Theorem 4.4.2 in [19] that

$$\partial f_R(x) = \operatorname{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\} \neq \emptyset \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n. \tag{42}$$

Then Theorem 4.1 tells us that D is uKsc on $\mathbb{R}^n$. Moreover, $f_R(x) = 0$ for every $x \in \operatorname{bd} S_R$ since f_R is continuous. Therefore we can rewrite the relation (37) as (41), and the conclusions follow then from Proposition 4.1.

(ii) ⇒ (iii). Assume that (41) holds. Take any $x \in \operatorname{bd} S_R$ and $0 \neq x^* \in N_{S_R}(x)$. Clearly,

$$\frac{x^*}{\|x^*\|} \in N_{S_R}(x) \cap \mathbb{S}^* \subseteq (0, \tau]\operatorname{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\}.$$

Thus $x^* \in (0, +\infty)\operatorname{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\}$, i.e.,

$$N_{S_R}(x) \subseteq [0, +\infty)\operatorname{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\}.$$

Note that $\partial f_R(x) \subseteq N_{S_R}(x)$ due to $f_R(x) = 0$. Moreover, since $N_{S_R}(x)$ is a cone one has

$$[0, +\infty)\partial f_R(x) \subseteq N_{S_R}(x).$$

This together with (42) implies that

$$[0, +\infty)\mathrm{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\} \subseteq N_{S_R}(x),$$

and hence (iii$_1$) holds. Next, we prove that (iii$_2$) is satisfied. Observe first that $\partial f_R(x)$ is closed and convex. We can now assume without loss of generality that

$$d(0, E[\partial f_R(x)]) < +\infty, \text{ i.e., } E[\partial f_R(x)] \neq \emptyset.$$

For each $y^* \in E[\partial f_R(x)]$, we have by the definition of the end set that $y^* \neq 0$ and $y^* \in \partial f_R(x)$. Since $\partial f_R(x) \subseteq N_{S_R}(x)$,

$$\frac{y^*}{\|y^*\|} \in N_{S_R}(x) \cap \mathbb{S}^*.$$

It follows from (41) and (42) that there exists $l \in (0, \tau]$ such that $\frac{y^*}{l\|y^*\|} \in \partial f_R(x)$. Then, by Definition 4.5, we must have $\frac{1}{l\|y^*\|} \leq 1$, which immediately leads to $\|y^*\| \geq \frac{1}{l} \geq \frac{1}{\tau}$. Consequently,

$$d(0, E[\partial f_R(x)]) \geq \frac{1}{\tau},$$

i.e., (iii$_2$) is fulfilled.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Take any $x \in \mathrm{bd}\, S_R$ and any $x^* \in N_{S_R}(x) = [0, +\infty)\mathrm{co}\{a \mid (a, b) \in U(x)\}$ such that $\|x^*\| = 1$. Then, by (42), there are $u^* \in \partial f_R(x)$ and $k > 0$ satisfying

$$u^* = \frac{x^*}{k} \in \partial f_R(x).$$

Further, by the boundedness of $\partial f_R(x)$ one has

$$M := \sup\{t \geq 0 \mid tx^* \in \partial f_R(x)\} < +\infty.$$

Therefore all assumptions of Lemma 4.2 (i) are satisfied. Applying this lemma, we get

$$Mx^* \in E[\partial f_R(x)] \subseteq \partial f_R(x).$$

Since $M > 0$ and $x^* \neq 0$, $Mx^* \in (0, 1]\partial f_R(x)$ and hence $x^* \in \left(0, \frac{1}{M}\right] \partial f_R(x)$. On the other hand, by (ii), one has

$$M = \left\|Mx^*\right\| \geq d(0, E[\partial f_R(x)] \geq \frac{1}{\tau}.$$

Thus we obtain that $x^* \in (0, \tau]\partial f_R(x)$, i.e., (41) holds. $\square$

Remark 4.3 Observe that the equivalence of (i) and (iii) in Corollary 4.1 can directly be deduced from Theorem 3.7 of [32] and Theorem 3.2 of [22].

For each $\bar{x} \in X$, the projection of $\bar{x}$ to $C \subset X$ is defined by

$$P(\bar{x}, C) := \{x \in C \mid \|\bar{x} - x\| = d(\bar{x}, C)\}.$$

When X is reflexive, the existence global error bounds for the system (35) can be characterized by the projection of the origin onto the convex hull of the subdifferentials of functions corresponding to the active indices at given points as follows.

Proposition 4.2 *Let each f_i and D be as in Theorem 4.1. Suppose that for all $x \in X \backslash S_F$, D is uKsc at x and $I(z) \neq \emptyset$ for all z in a neighborhood of x. Suppose further that X is reflexive. Then, the system (35) has a global error bound if and only if*

$$\rho := \inf\left\{\|u^*\| \mid u^* = P\left(0, \operatorname{co}\left(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\right)\right),\ x \in X \setminus S_F\right\} > 0. \tag{43}$$

Moreover, if an error bound for the system (35) exists then $\tau_{\min} = \frac{1}{\rho}$.

Proof By Theorem 4.1, we have

$$\partial F(x) = \operatorname{co}\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big) \neq \emptyset,\ \forall x \in X \setminus S_F. \tag{44}$$

Observe that since X^* is reflexive and $\partial F(x)$ is convex and weak*-closed, by (44) and Theorem 3.8.1 (i) in [44], for every $x \in X \setminus S_F$ one has

$$P\Big(0, \operatorname{co}\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big)\Big) \neq \emptyset. \tag{45}$$

[$\Longrightarrow$] Assume that the system (35) has a global error bound, i.e., (36) holds. It follows immediately from Theorem 2.6 in [2] that

$$\inf\left\{\|x^*\| \mid x^* \in \partial F(x),\ x \in X \setminus S_F\right\} \geq \frac{1}{\tau}.$$

This together with (44) implies that

$$\inf\left\{\|x^*\| \mid x^* \in \operatorname{co}\Big(\bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)\Big),\ x \in X \setminus S_F\right\} > 0, \tag{46}$$

and hence (43) holds.

[$\Longleftarrow$] Let any $\tau \in (\frac{1}{\rho}, +\infty)$. We claim that for every $x \in X \backslash S_F$ and every $v^* \in \operatorname{co}\Big(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x)\Big)$,

$$\|v^*\| > \frac{1}{\tau}.$$

Suppose on the contrary that there exist $x_0 \in X \setminus S_F$ and $w^* \in \operatorname{co}\Big(\bigcup_{i \in I(x_0)} \partial f_i(x_0)\Big)$ such that $\|w^*\| \leq \frac{1}{\tau}$. Take any $u_0^* \in P\Big(0, \operatorname{co}\Big(\bigcup_{i \in I(x_0)} \partial f_i(x_0)\Big)\Big)$. Then one has

$$\rho \leq \|u_0^*\| \leq \|w^*\| \leq \frac{1}{\tau},$$

a contradiction. Consequently, (46) is fulfilled. Then by (44), one has

$$\inf \Big\{ \|x^*\| \mid x^* \in \partial F(x),\ x \in X \setminus S_F \Big\} \geq \frac{1}{\tau}.$$

We now use Theorem 2.4 in [25] to get the conclusion.
[**Computing** $\tau_{\min} = \frac{1}{\rho}$]. Suppose that the system (35) has a global error bound. As seen in the proof of the first part, we have $\rho \geq \frac{1}{\tau}$, or equivalently, $\tau \geq \frac{1}{\rho}$. On the other hand, for each $\epsilon > 0$ we can find $\tau > 0$ such that $\frac{1}{\rho} \leq \tau < \frac{1}{\rho} + \epsilon$. In the proof of the sufficient part, we showed that the system (35) has a global error bound, i.e., (36) holds for this τ. Letting $\epsilon \to 0$, we have $\tau_{\min} = \frac{1}{\rho}$. The proof is completed. □

Remark 4.4 When applied to the particular case, where $X = \mathbb{R}^n$, I is a compact Hausdorff space and each f_i is an affine function, Proposition 4.2 implies Proposition 3.2 in [9].

5 Conclusions

This article shows how to deal with convex functions without lower semicontinuity in the framework of the theory of global error bounds. After providing necessary and sufficient conditions for the existence of global error bounds for a convex function, we give a description of the subdifferential of the supremum function of an arbitrary family of convex continuous functions. The obtained results are applied to derive characterizations for the existence of global error bounds for infinite systems of linear inequalities.

Acknowledgements The author is grateful to the editor and the anonymous reviewers for their invaluable comments and suggestions, which significantly contributed to enhancing both the content and presentation of the paper. In particular, one of the reviewers pointed out an error in the previous version of Lemma 3 and suggested a correction. This research is funded by University of Science, VNU-HCM, under grant number T2024-02.

References

1. Azé, D.: A survey on error bounds for lower semicontinuous functions. In: ESAIM: Proceedings, vol. 13, pp. 1–17. EDP Sciences (2003)
2. Azé, D., Corvellec, J.N.: On the sensitivity analysis of Hoffman constants for systems of linear inequalities. SIAM J. Optim. **12**(4), 913–927 (2002)
3. Bolte, J., Daniilidis, A., Ley, O., Mazet, L.: Characterizations of Lojasiewicz inequalities and applications. Trans. Am. Math. Soc. **362**(6), 3319–3363 (2010)
4. Borwein, J., Fitzpatrick, S., Girgensohn, R.: Subdifferentials whose graphs are not norm× weak* closed. Canad. Math. Bull. **46**(4), 538–545 (2003)
5. Borwein, J., Lewis, A.: Convex Analysis. Springer, New York (2006)
6. Boţ, R.I., Csetnek, E.R.: Error bound results for convex inequality systems via conjugate duality. Top **20**(2), 296–309 (2012)
7. Burke, J.V., Deng, S.: Weak sharp minima revisited, part II: application to linear regularity and error bounds. Math. Program. **104**(2), 235–261 (2005)
8. Chuong, T.D., Jeyakumar, V.: Characterizing robust local error bounds for linear inequality systems under data uncertainty. Linear Algebra Appl. **489**, 199–216 (2016)
9. Chuong, T.D., Jeyakumar, V.: Robust global error bounds for uncertain linear inequality systems with applications. Linear Algebra Appl. **493**, 183–205 (2016)
10. Chuong, T.D., Jeyakumar, V.: An exact formula for radius of robust feasibility of uncertain linear programs. J. Optim. Theory Appl. **173**(1), 203–226 (2017)
11. Deng, S.: Global error bounds for convex inequality systems in Banach spaces. SIAM J. Control Optim. **36**(4), 1240–1249 (1998)
12. Deng, S., Hu, H.: Computable error bounds for semidefinite programming. J. Glob. Optim. **14**(2), 105–115 (1999)
13. Fabian, M.J., Henrion, R., Kruger, A.Y., Outrata, J.V.: Error bounds: necessary and sufficient conditions. Set-Valued Var. Anal. **18**(2), 121–149 (2010)
14. Fajardo, M.D., Goberna, M.A., Rodrıguez, M., Vicente-Pérez, J.: Even Convexity and Optimization. Springer, Cham (2020)
15. Fajardo, M.D., Vicente-Pérez, J., Rodríguez, M.: Infimal convolution, c-subdifferentiability, and Fenchel duality in evenly convex optimization. Top **20**, 375–396 (2012)
16. Fang, D., Li, C., Ng, K.: Constraint qualifications for optimality conditions and total Lagrange dualities in convex infinite programming. Nonlinear Anal. **73**(5), 1143–1159 (2010)
17. Fenchel, W.: A remark on convex sets and polarity. , Commun. Sem. Math. Univ. Lund Tome Suppl., 82–89 (1952)
18. He, Y.: Global error bound for convex inclusion problems. J. Global Optim. **39**(3), 419–426 (2007)
19. Hiriart-Urruty, J.B., Lemaréchal, C.: Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Fundamentals. Springer, Berlin (1993)
20. Hoffman, A.J.: On approximate solutions of systems of linear inequalities. J. Res. Nat. Bur. Stand. **49**(4) (1952)
21. Hu, H.: Characterizations of the strong basic constraint qualifications. Math. Oper. Res. **30**(4), 956–965 (2005)
22. Hu, H.: Characterizations of local and global error bounds for convex inequalities in Banach spaces. SIAM J. Optim. **18**(1), 309–321 (2007)
23. Ioffe, A.D.: Regular points of Lipschitz functions. Trans. Am. Math. Soc. **251**, 61–69 (1979)
24. Ioffe, A.D.: Metric regularity and subdifferential calculus. Russ. Math. Surv. **55**(3), 501 (2000)
25. Jourani, A.: Hoffman's error bound, local controllability, and sensitivity analysis. SIAM J. Control Optim. **38**(3), 947–970 (2000)
26. Kruger, A.Y.: Error bounds and metric subregularity. Optimization **64**(1), 49–79 (2015)
27. Levin, V.: Application of E. Helly's theorem to convex programming, problems of best approximation and related questions. Mat. Sb. **8**(2), 235–247 (1969)
28. Lewis, A.S., Pang, J.S.: Error bounds for convex inequality systems. In: Crouzeix, J.P., Martinez-Legaz, J.E., Volle, M. (eds.) Generalized Convexity, Generalized Monotonicity: Recent Results, pp. 75–110. Springer, Berlin (1998)
29. Li, C., Ng, K.F., Pong, T.K.: Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization. SIAM J. Optim. **19**(1), 163–187 (2008)
30. Li, G.: Global error bounds for piecewise convex polynomials. Math. Program. **137**(1), 37–64 (2013)

31. Li, W.: Abadie's constraint qualification, metric regularity, and error bounds for differentiable convex inequalities. SIAM J. Optim. **7**(4), 966–978 (1997)
32. Li, W., Nahak, C., Singer, I.: Constraint qualifications for semi-infinite systems of convex inequalities. SIAM J. Optim. **11**(1), 31–52 (2000)
33. Mordukhovich, B.S.: Variational Analysis and Generalized Differentiation II: Applications, vol. 331. Springer, Berlin (2006)
34. Ngai, H.V.: Global error bounds for systems of convex polynomials over polyhedral constraints. SIAM J. Optim. **25**(1), 521–539 (2015)
35. Ngai, H.V., Kruger, A., Théra, M.: Stability of error bounds for semi-infinite convex constraint systems. SIAM J. Optim. **20**(4), 2080–2096 (2010)
36. Ngai, H.V., Théra, M.: Error bounds for convex differentiable inequality systems in Banach spaces. Math. Program. **104**(2), 465–482 (2005)
37. Pang, J.S.: Error bounds in mathematical programming. Math. Program. **79**(1), 299–332 (1997)
38. Pshenichnyi, B.: Convex programming in a normalized space. Cybernetics **1**(5), 46–57 (1965)
39. Robinson, S.M.: An application of error bounds for convex programming in a linear space. SIAM J. Control Optim. **13**(2), 271–273 (1975)
40. Rodrıguez, M.M., Vicente-Pérez, J.: On evenly convex functions. J. Convex Anal. **18**, 721–736 (2011)
41. Valadier, M.: Sous-différentiels d'une borne supérieure et d'une somme continue de fonctions convexes. CR Acad. Sci. Paris Sér. AB **268**, A39–A42 (1969)
42. Volle, M., Martinez-Legaz, J.E., Vicente-Pérez, J.: Duality for closed convex functions and evenly convex functions. J. Optim. Theory Appl. **167**, 985–997 (2015)
43. Wu, Z., Ye, J.J.: On error bounds for lower semicontinuous functions. Math. program. **92**(2), 301–314 (2002)
44. Zălinescu, C.: Convex Analysis in General Vector Spaces. World Scientific, Singapore (2002)
45. Zălinescu, C.: A nonlinear extension of Hoffman's error bounds for linear inequalities. Math. Oper. Res. **28**(3), 524–532 (2003)
46. Zheng, X.Y., Ng, K.F.: Metric regularity and constraint qualifications for convex inequalities on Banach spaces. SIAM J. Optim. **14**(3), 757–772 (2004)